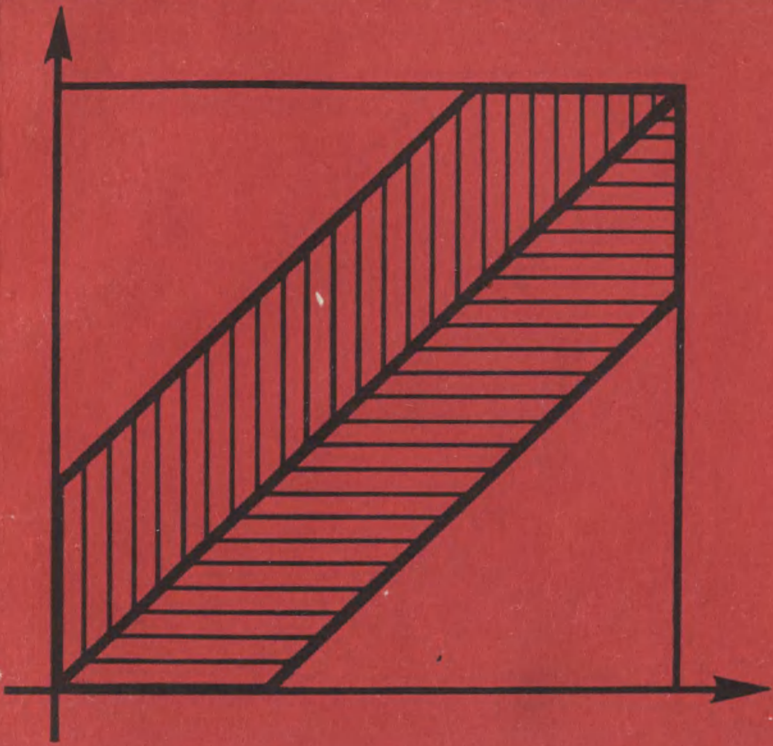
ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС



МАТЕМАТИКА

10

Дополнительные главы по курсу МАТЕМАТИКИ 10 класса для факультативных занятий

Пособие для учащихся

СБОРНИК СТАТЕЙ

Составитель *З. А. СКОПЕЦ*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1970

Скопец З. А.

С 44 Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий. Пособие для учащихся. Сост. З. А. Скопец, М., «Просвещение», 1969.

256 с. 31 к.

Книга состоит из статей, содержащих теоретический учебный материал и набор упражнений по темам факультативных курсов по математике для десятых классов.

$\frac{6-6}{348-69}$ 51(075)

Предисловие

По курсу десятого класса в программе факультативных занятий значатся такие темы: 1) Интеграл (12 часов), 2) Начало теории вероятностей с элементами комбинаторики (18 часов), 3) Алгебраические уравнения любой степени (8 часов), 4) Тема по выбору преподавателя (10 часов), 5) Решение задач по общему курсу математики (22 часа).

Чтобы сосредоточить внимание на первых трех темах, рекомендуем 10 учебных часов, отведенных на изучение четвертой темы, разделить между первой и третьей темами с таким расчетом, чтобы на изучение каждой из этих тем приходилось по 15 уроков. Кроме того, не меняя по содержанию третью тему, мы ее называем так: «Многочлены и их корни».

В предлагаемом учебном пособии содержится теоретический материал с упражнениями по указанным трем темам, а также сборник задач по всем основным разделам общего курса математики. Сборник задач содержит преимущественно задачи по стереометрии, решение которых должно в первую очередь способствовать развитию пространственных представлений и выработке умений применять знания по алгебре и тригонометрии к решению геометрических задач.

В теме «Интеграл» излагается понятие определенного интеграла и его приложения к геометрии, механике и физике.

Определенный интеграл на данном сегменте рассматривается как приращение первообразной функции на этом сегменте. Это позволяет в доступной для учащихся форме ввести понятие интеграла, изучить некоторые его свойства.

Специальные приемы нахождения первообразных не рассматриваются. Рекомендуется использовать функции, первообразные которых непосредственно угадываются на основании известной учащимся таблицы производных. В отдельных случаях, в связи с решением задач (например, при вычислении площади круга, эллипса и др.), эта таблица может быть расширена.

Весь теоретический материал иллюстрируется решением примеров и задач. Предложенные упражнения и задачи могут служить материалом для классных и домашних занятий.

Время, отведенное программой факультативных занятий на изучение интеграла, вряд ли позволяет охватить весь предложенный материал. В первую очередь из приложений интеграла в план занятий естественно включить вычисление площади и объема, длины пути, пройденного телом при прямолинейном неравномерном движении, массы стержня (или величины тока и работы переменной силы). Если количество часов на изучение этой темы может быть увеличено, то рекомендуем рассмотреть другие приложения интеграла, в частности обосновать принцип Кавальери и вывести формулы Симпсона.

Прежде чем перейти к изучению интеграла, учащиеся должны повторить понятие предела функции, ее непрерывность и таблицу производных.

Изучение начал теории вероятностей предполагается начинать с беседы, в которой на интересных примерах раскрывается содержание этого раздела математики.

Первый параграф темы посвящен начальным понятиям теории вероятностей (элементарное событие, случайное событие, схема испытания, вероятность). Формирование этих понятий осуществляется путем разбора достаточного числа специально подобранных упражнений.

Второй параграф знакомит учащихся с элементами комбинаторики и вычислением вероятностей при помощи непосредственного подсчета всех возможных исходов испытания и исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию. Изложение этого материала сопровождается решением большого количества задач. Помимо формул числа перестановок и сочетаний без повторений, включены и формулы числа перестановок с повторениями, применение которых позволит значительно расширить число решаемых задач. Эти формулы находят применение при изучении схемы повторных независимых испытаний и выводе формулы бинома Ньютона.

В третьем параграфе рассматриваются теоремы о вероятности суммы и произведения событий и основанные на них задачи. Большое внимание уделяется выполнению операций над событиями на основе решения соответствующих подготовительных упражнений.

Достаточное внимание уделено геометрическим вероятностям. При решении задач этой темы появляется возможность повторить вопросы предыдущего параграфа.

Изучение схемы повторных независимых испытаний позволяет решить много интересных задач. Здесь дается вывод формулы Бернулли. Однако эту формулу можно предложить и без ее вывода, но так, чтобы необходимость этой формулы следовала из разбора специально подобранных задач.

Тема «Многочлены и их корни» содержит по существу два раздела: 1) Операции над многочленами (§ 1—6) и 2) Свойства корней многочлена (§ 7—10). Эта тема не должна вызвать особых затруднений, так как понятие многочлена (линейного и квадратного) и его корней встречается при изучении различных разделов обязательного курса алгебры.

Задачи по общему курсу математики предназначены для повторения всего курса математики средней школы. Большинство из них не требует знакомства с материалом, не входящим в курс средней школы. В тех немногих случаях, когда для решения целесообразно применить не предусмотренную программой теорему, эта теорема приводится в виде задачи и дается ее решение. Это касается, например, теоремы Менелая для треугольника и косого (не плоского) четырехугольника и теоремы косинусов и синусов трехгранного угла.

Для развития умения обобщать теорему наряду со стереометрическими задачами предложены также планиметрические. Содержание последних обобщается в стереометрических задачах.

Почти ко всем задачам даны краткие указания, ответы или решения, в которых из-за недостатка места, естественно, не приводится полное исследование возможных случаев, допускаемых условием задачи. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

ИНТЕГРАЛ

М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов

Понятие производной, как мы знаем, имеет большое практическое значение. Так, зная закон прямолинейного движения, мы находим скорость его как производную пути по времени; зная закон распределения массы прямолинейного стержня, мы находим его плотность как производную массы по длине. По уравнению кривой с помощью производной мы можем определить угловой коэффициент касательной и т. д.

Но приходится решать и обратную задачу: по известной скорости неравномерного прямолинейного движения устанавливать закон его движения или находить длину пройденного пути; по заданному угловому коэффициенту касательной к кривой находить уравнение этой кривой. Другими словами, приходится искать (восстанавливать) функцию по заданной ее производной.

Далее, из курса геометрии известно, как найти площадь многоугольника, круга и его частей, объем пирамиды, шара. Но в практике часто приходится искать площади фигур, ограниченных различными кривыми,— дугами парабол, гипербол и т. д., а также объемы тел более сложных форм.

Необходимость отыскания функции по заданной производной, а также потребность создать общий метод для вычисления площадей, объемов, работы и т. п. привели к созданию интегрального исчисления.

Возникновение интегрального исчисления, как и дифференциального, относят обычно ко второй половине XVII века и связывают с именами английского математика и механика И. Ньютона и немецкого математика и философа Г. Лейбница. Дальнейшее развитие интегральное исчисление получило в трудах ученых различных стран. В России интегральное исчисление разрабатывали Л. Эйлер, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев, а в последние десятилетия Н. Н. Лузин, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров и др.

§ 1. Первообразная функция

Решим такую задачу.

Задача. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=2t\ \left(\frac{м}{сек}\right)$. Найти закон движения, если за две первые секунды тело прошло 15 *м*.

Решение. Искомый закон движения выражается функцией, связывающей длину пройденного пути со временем. Обозначим эту функцию через $S(t)$. Скорость прямолинейного движения равна производной пути по времени $v=S'(t)$. В данном случае $S'(t)=2t$. Таким образом, нам нужно найти функцию $S(t)$, зная ее производную по времени и ее значение при $t=2$; $S(2)=15$.

Легко проверить, что производная каждой функции

$$S=t^2+C, \tag{1}$$

где C — произвольная постоянная, равная $2t$.

Для решения нашей задачи годится не всякое значение C. Например, если бы мы взяли $C=100$, то получили бы функцию $S=t^2+100$, значение которой при $t=2$ равнялось бы 104, в то время как по условию задачи, при $t=2$ значение S' должно равняться 15.

Чтобы найти значение произвольной постоянной, используем условие: при $t=2$ *сек* получаем $S=15$ *м*.

Подставив эти значения t и S в равенство (1), получим $15=4+C$, откуда $C=11$. Функция $S=t^2+11$ выражает искомый закон движения, ибо скорость этого движения равна $2t$ и при $t=2$ имеем $S=15$.

При решении рассмотренной задачи мы сначала искали по производной $S'=2t$ саму функцию. Таких функций оказалось бесконечное множество. Это функции $S=t^2+C$, где C может равняться любому действительному числу. Затем из этого множества функций мы выбирали ту, которая при $t=2$ принимает значение, равное 15. Ею оказалась функция $S=t^2+11$. Но мы все же не можем пока утверждать, что найденное решение $S=t^2+11$ является единственным, так как мы еще не знаем, является ли множество функций (1) множеством всех функций, производная которых равна $2t$.

Отыскание множества всех функций, производная каждой из которых равна заданной функции, составляет одну из задач интегрального исчисления.

Определение. *Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если в любой точке этого сегмента ее производная равна $f(x)$:*

$$F'(x)=f(x), \quad x\in[a, b].$$

Например, функция $S=t^2+C$ в рассматриваемой задаче является первообразной для функции $v=2t$, так как $S'(t)=2t$ для всех значений t.

Убедимся, что функция $F(x)=-\cos x+C$, где C — произвольная постоянная, является первообразной для функции $f(x)=\sin x$ на любом сегменте. Для этого найдем производную $F(x)$. Имеем: $F'(x)=(-\cos x+C)'=(-\cos x)'+C'=\sin x=f(x)$.

Найти первообразные функций:

$$\text{а) } f(x)=2x; \quad \text{б) } f(x)=4x^3+1; \quad \text{в) } f(x)=\cos x.$$

Нетрудно сообразить, что первообразными этих функций являются функции: а) $F(x)=x^2+C$; б) $F(x)=x^4+x+C$; в) $F(x)=\sin x+C$ — при любом значении x и при любом C.

Как видим, если функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ первообразную $F(x)$, то она имеет на этом сегменте бесконечное множество первообразных $F(x)+C$, получаемых при различных значениях C. Возникает вопрос, содержит ли множество $F(x)+C$, где C можно взять равным любому действительному числу, все первообразные функции $f(x)$.

Известно, что производная постоянной равна нулю. Оказывается, справедливо и обратное утверждение, которым мы и воспользуемся для отыскания множества всех первообразных заданной функции.

Лемма. *Если производная функции на некотором сегменте равна тождественно нулю, то функция на этом сегменте сохраняет постоянное значение.*

Доказательство леммы выходит за пределы нашей программы, и мы примем ее без доказательства.

Теорема. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то множество функций $F(x)+C$,* где *C — произвольная постоянная, содержит все первообразные функции $f(x)$ на этом сегменте.*

Доказательство. Пусть $G(x)$ — другая произвольная первообразная функции $f(x)$ на том же сегменте, т. е. пусть $G'(x)=f(x)$, $x \in [a, b]$. Убедимся, что первообразная $G(x)$ содержится в множестве $F(x)+C$.

Рассмотрим функцию:

$$U(x)=G(x)-F(x). \qquad (2)$$

Ее производная на сегменте $[a, b]$ тождественно равна нулю:

$$U'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

По лемме функция $U(x)$ на сегменте $[a, b]$ сохраняет постоянное значение. Обозначим его через C_1:

$$U(x)=C_1, \quad x \in [a, b]. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) получим: $G(x)=F(x)+C_1$. Следовательно, первообразная функция $G(x)$ на сегменте $[a, b]$ отличается некоторой аддитивной[1] постоянной C_1 от первообразной $F(x)$ и поэтому содержится в множестве $F(x)+C$: $G(x) \in F(x)+C$, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=4t+1$. Найти закон движения, если за пять первых секунд тело прошло 105 *м*.

2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 2)$, у которой угловой коэффициент касательной в каждой точке равен $3x^2$.

Решение. Значение углового коэффициента касатель-

---

[1] То есть постоянной, которую надо прибавить.

ной к кривой $y=f(x)$ в точке кривой $A(x, y)$ равно значению производной функции $f(x)$ в точке x:

$$f'(x)=3x^2.$$

Таким образом, решение задачи сводится к отысканию функции, производная которой равна $3x^2$ и график которой проходит через точку $A(1, 2)$. Функций, которые имеют производную, равную $3x^2$, бесконечное множество: $y=x^3+C$, где C — произвольная постоянная. Используя условие, что кривая проходит через точку $A(1, 2)$, найдем значение C.

Из равенства $y=x^3+C$ при $x=1$ и $y=2$ получим равенство $2=1+C$, откуда $C=1$. Кривая, заданная уравнением $y=x^3+1$, является искомой. Действительно, кривая проходит через точку $A(1, 2)$, и угловой коэффициент ее касательной в каждой точке равен $3x^2$.

3. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 1)$, у которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен удвоенной абсциссе этой точки.

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(0, -1)$, у которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен 5.

5. Найти все первообразные функции $f(x)$, если: а) $f(x)=-2x$; б) $f(x)=5x^4$; в) $f(x)=10$; г) $f(x)=6x+5$.

6. Доказать, что если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то в каждой его точке функция $y=F(x)+\cos x$ имеет производную. Может ли функция $y=|x|$ быть первообразной некоторой функции на сегменте $[-1, 3]$?

§ 2. Таблица первообразных. Свойства первообразных

1. Составим таблицу первообразных для некоторых функций в их области существования.

	$f(x)$	$F(x)+C$
1	*Степенная функция* $f(x)=x^n\ (n\neq-1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

Продолжение

	$f(x)$	$F(x)+C$
2	$f(x)=\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$[1]
	Показательная функция	
3	$f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
4	$f(x)=e^x$	e^x+C
	Тригонометрические функции	
5	$f(x)=\sin x$	$-\cos x+C$
6	$f(x)=\cos x$	$\sin x+C$
	Полезно также знать первообразную функции	
7	$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$

[1] Действительно, если $x>0$, то $\lvert x\rvert=x$ и $[\ln\lvert x\rvert]'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

Если $x<0$, то $\lvert x\rvert=-x$ и $[\ln\lvert x\rvert]'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$.

2. Некоторые свойства первообразной функции.

Свойство 1. *Если функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются на сегменте $[a, b]$ первообразными соответственно для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то их сумма $F_1(x)+F_2(x)$ является на этом сегменте первообразной для суммы $f_1(x)+f_2(x)$.*

Доказательство.

По условию

$$F_i'(x)=f_i(x)\quad (i=1,\ 2),\quad x\in[a, b].$$

Поэтому

$$[F_1(x)+F_2(x)]'=F_1'(x)+F_2'(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

Свойство 1 доказано.

Пример. Найти все первообразные функции $f(x)=3x^2+\cos x$.

Решение. Так как функция $F_1(x)=x^3$ является одной из первообразных функции $f_1(x)=3x^2$, а $F_2(x)=\sin x$ — первообразной $\cos x$, то одной из первообразных для функции $f(x)=3x^2+\cos x$ будет функция $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, т. е. $F(x)=x^3+\sin x$. Чтобы получить все первообразные заданной функции, нужно к $F(x)$ прибавить произвольную постоянную C.

Таким образом, множеством всех первообразных для данной функции является множество функций $x^3+\sin x+C$.

Свойство 2. *Если функция $G(x)$ является на сегменте $[a, b]$ первообразной для $f(x)$, то функция $F(x)=k\cdot G(x)$, где k — некоторое число, является первообразной на том же сегменте для функции $k\cdot f(x)$.*

Доказательство.

Справедливость свойства вытекает из равенства:

$$F'(x)=[kG(x)]'=k[G(x)]'=k\cdot f(x).$$

Свойство 3. *Если функция $F(x)$ является на сегменте $[a, b]$ первообразной функции $f(x)$, то функция $\frac{1}{k}F(kx+p)$ является на этом сегменте первообразной функции $f(kx+p)$, где k, p — постоянные, $k\neq 0$.*

Доказательство. Так как $[F(kx+p)]'=kF'(kx+p)=kf(kx+p)$, то $\left[\frac{1}{k}F(kx+p)\right]'=f(kx+p)$. Свойство доказано[1].

Пример. Найти все первообразные функции $f(x)=\sin(7x-5)$.

Решение. Одной из первообразных заданной функции является функция $F(x)=-\frac{1}{7}\cos(7x-5)$, поэтому множеством всех первообразных является множество функций $-\frac{1}{7}\cos(7x-5)+C$, где C — произвольная постоянная.

Замечание. Не останавливаясь на выяснении вопроса о том, какие функции имеют первообразные, заметим, что *непрерывная функция всегда имеет первообразную.* Например, функции $y=\sin^3 x$, $y=\operatorname{tg} x$, $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\sin x}{x}$, $x\neq 0$ имеют первообразные на любом сегменте

[1] См.: Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и элементарные функции, ч. 2. М., «Просвещение», 1966, § 230.

из их области существования, так как они на этих сегментах являются функциями непрерывными. Способы отыскания первообразных этих функций мы здесь указывать не будем.

Упражнения

В задачах 7—24 найти все первообразные указанных функций. Дифференцированием проверить найденные ответы.

7. $y = \frac{1}{x^2}$.

8. $y = -\frac{8}{x^5}$.

9. $y = x^{\frac{3}{2}}$.

10. $y = x\sqrt[5]{x^3}$.

11. $y = 3x^2 + 6x + 7$.

12. $y = 6\cos 2x$.

13. $y = 7\sin(5x + 2)$.

14. $y = \cos(\sqrt{2} - 11x)$.

15. $y = 7\sin\frac{\pi x}{3}$.

16. $y = \sqrt{x} + 5\cos(3x - 1)$.

17. $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 11x - 7}{x}$.

18. $y = (x + 2)^{100}$.

19. $y = e^{2x+5}$.

20. $y = \sqrt{4x - 7}$.

21. $y = \frac{\sin 2x + 7\sin^2 x}{\sin x}$.

22. $y = \sin^2 x$.

Указание. Заменить $\sin^2 x$ через $\frac{1 - \cos 2x}{2}$.

23. $y = \cos x \cdot \sin 3x$.

Указание. Преобразовать произведение в сумму.

24. $y = \cos 2x \cdot \cos 3x$.

25. Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была параболой $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, необходимо и достаточно, чтобы производная функции $f(x)$ была линейной функцией. Доказать.

26. Какому необходимому и достаточному условию должна удовлетворять производная функции $y = f(x)$, для того чтобы кривая $y = f(x)$ была кубической параболой?

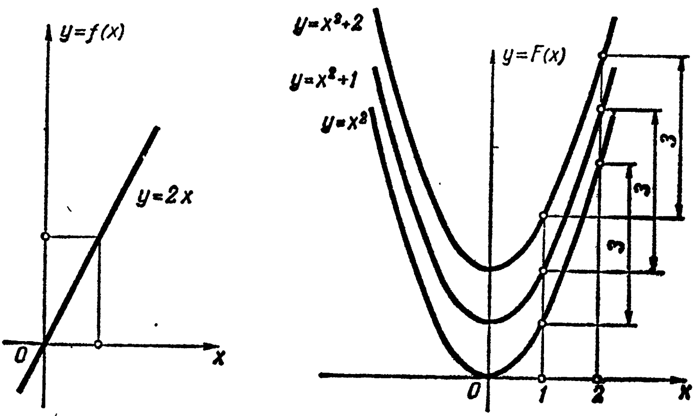
§ 3. Определенный интеграл

Понятие определенного интеграла связано с отысканием приращения первообразной функции на заданном сегменте.

Решим задачу.

Задача. Найти приращение любой первообразной функции $y=2x$ на сегменте $[1, 2]$.

Решение. Множеством всех первообразных функции $y=2x$ является множество функций x^2+C. Обозначим некоторую первообразную из этого множества через $F(x)=x^2+C_1$ и найдем ее приращение на сегменте $[1, 2]$. Имеем: $\Delta F(x)=F(2)-F(1)=4+C_1-(1+C_1)=3$. Очевидно, приращение первообразной $F(x)$ не зависит от выбора числа C_1, поэтому приращение любой первообразной заданной функции на сегменте $[1, 2]$ равно 3.



Черт. 1

На чертеже 1 изображены первообразные функции $y=2x$ и их приращения на сегменте $[1, 2]$.

Теорема. *Приращения любых первообразных данной функции на заданном сегменте равны между собой.*

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$. Ее приращение на сегменте $[a, b]$ равно разности $F(b)-F(a)$. Пусть $G(x)$ — любая другая первообразная той же функции $f(x)$. Она, как мы видели, может отличаться от первообразной $F(x)$ только некоторой аддитивной постоянной, которую мы обозначим через C_0. Итак,

$$G(x)=F(x)+C_0. \qquad (4)$$

Теперь найдем приращение первообразной $G(x)$ на том же сегменте $[a, b]$, имея в виду равенство (4):

$$G(b)-G(a)=[F(b)+C_0]-[F(a)+C_0],$$

или

$$G(b)-G(a)=F(b)-F(a).$$

Теорема доказана.

Определение. *Определенным интегралом*[1] *от данной функции на сегменте называется приращение любой ее первообразной на этом сегменте.*

Определенный интеграл от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ записывается так:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования. Множитель dx указывает на то, что первообразную подынтегральной функции надо искать по аргументу x. Например, в интеграле $\int_a^b t\cos x\,dx$, первообразную от $t\cos x$ надо искать по x, и она будет равна $t\sin x$, а в интеграле $\int_a^b t\cos x\,dt$ первообразную от $t\cos x$ надо искать по t, и она будет равна $\frac{t^2}{2}\cos x$ (t в первом случае, а x во втором считаются постоянными).

---

[1] Термин *интеграл* ввел швейцарский математик Иоганн Бернулли (1667—1748), написавший первый систематический курс интегрального исчисления. Его ученик Леонард Эйлер (1707—1783) записывал определенный интеграл в виде $\int p\,dx \begin{bmatrix} \text{от } x=a \\ \text{до } x=b \end{bmatrix}$. Современное обозначение было введено французским математиком Ж. Фурье (1768—1830).

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \tag{5}$$

где

$$F'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Равенство (5) называют *формулой Лейбница — Ньютона.* Итак, *для того чтобы найти значение определенного интеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$, *достаточно найти одну из первообразных*[1] *подынтегральной функции* $f(x)$ *и вычислить ее приращение на сегменте* $[a, b]$.

Приращение $F(b) - F(a)$ принято записывать символом $F(x)\,|_a^b$.

Примеры

1. $\int_1^4 2x\,dx = x^2\,|_1^4 = 16 - 1 = 15.$

2. $\int_{-4}^4 2x\,dx = x^2\,|_{-4}^4 = 16 - 16 = 0.$

3. $\int_a^b dx = x\,|_a^b = b - a.$

Упражнения

Найти значения определенных интегралов:

27. $\int_1^2 4x\,dx.$ 28. $\int_0^3 3x^2\,dx.$ 29. $\int_{-1}^4 8x^3\,dx.$ 30. $\int_{-1}^2 5x^4\,dx.$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx.$ 32. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx.$ 33. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx.$ 34. $\int_0^1 e^x\,dx.$

[1] Здесь и ниже рассматриваются функции, имеющие первообразные.

§ 4. Свойства определенного интеграла

Для вычисления определенных интегралов удобно использовать их свойства.

Свойство 1. *Определенный интеграл от суммы функций равен сумме определенных интегралов от этих функций.*

Доказательство. Рассмотрим случай двух функций. Итак, надо доказать, что

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx. \qquad (6)$$

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются соответственно первообразными для функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Тогда

$$\int_a^b f_1(x)\,dx=F_1(b)-F_1(a), \qquad (7)$$

$$\int_a^b f_2(x)\,dx=F_2(b)-F_2(a). \qquad (8)$$

Далее, функция $F_1(x)+F_2(x)$ является первообразной для функции $f_1(x)+f_2(x)$, поэтому

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\,dx=[F_1(b)+F_2(b)]-[F_1(a)+F_2(a)]=$$
$$=[F_1(b)-F_1(a)]+[F_2(b)-F_2(a)]. \qquad (9)$$

Из равенств (7), (8) и (9) следует равенство (6).

Свойство 1 для случая двух функций доказано. Методом математической индукции свойство легко распространяется на любое число слагаемых.

Пример. $\int_0^2 (x^2-3x+\sin x)\,dx=\int_0^2 x^2\,dx-\int_0^2 3x\,dx+$
$+\int_0^2 \sin x\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2-\frac{3x^2}{2}\Big|_0^2-\cos x\Big|_0^2=\frac{8}{3}-0-6+0-\cos 2+$
$+1=-2\,\frac{1}{3}-\cos 2.$

Свойство 2. *Если на сегменте* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *положительна, то ее определенный интеграл на этом сегменте есть положительное число:*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть первообразная положительной функции $f(x)$. Тогда $F'(x) = f(x) > 0$, поэтому $F(x)$ есть возрастающая[1] функция и $F(b) - F(a) > 0$ $(b > a)$. Так что

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) > 0.$$

Например,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Аналогично доказывается третье свойство.

Свойство 3. *Если на сегменте* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *отрицательна, то ее определенный интеграл на этом сегменте есть отрицательное число:*

$$\int_a^b f(x)\,dx < 0.$$

Например,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} = -1.$$

Свойство 4. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.*

Доказательство. Пусть $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$. Тогда для функции $kf(x)$, где k — постоянная, первообразной будет функция $G(x) = kF(x)$. В самом деле, $G'(x) = [kF(x)]' = kF'(x) = kf(x)$. Рассмотрим теперь интеграл:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = G(b) - G(a) = k\,[F(b) - F(a)] = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

---

[1] См.: Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и элементарные функции, ч. 2. М., «Просвещение», 1966, § 236.

Свойство 4 доказано.

Пример. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами интеграла. Будем иметь: $\int\limits_1^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx = 6\int\limits_1^2 x^2\,dx - 4\int\limits_1^2 x\,dx + 5\int\limits_1^2 dx = 2(2^3 - 1^3) - 2(2^2 - 1^2) + 5(2 - 1) = 13.$

Упражнения

Вычислить определенные интегралы:

35. $\int\limits_0^2 (2x - 1)\,dx.$

36. $\int\limits_{-1}^{8} 4x^3\,dx.$

37. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx.$

38. $\int\limits_0^1 e^x\,dx.$

39. $\int\limits_0^1 (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\,dx.$

40. $\int\limits_1^2 (x^3 - 3x^2 + 4x - 7)\,dx.$

41. $\int\limits_1^4 \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x}\,dx.$

Указание. Разделить почленно и учесть, что $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

42. $\int\limits_{3}^{6}\left(\frac{x^3}{2}-\frac{2}{x^2}\right)dx.$

43. $\int\limits_{-1}^{0}x(2x-5)\,dx.$

44. $\int\limits_{-2}^{2}(3x^2-5x)\,dx.$

45. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2x-\sin x)\,dx.$

46. $\int\limits_{0}^{\pi}\cos^2 x\,dx.$

Указание. $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.$

47. $\int\limits_{0}^{2\pi}(1+\cos x)^2\,dx.$

Указание. Предварительно возвести в квадрат.

48. Убедиться, что интеграл от нечетной функции на сегменте $[-a, a]$ равен нулю, а интеграл от четной функции на том же сегменте равен удвоенному интегралу от этой функции на сегменте $[0, a]$.

Указание. См. § 10, задачи 92 и 93.

§ 5. Что такое площадь?

Понятие площади принадлежит к числу довольно сложных понятий математики и подробно изучается в ее специальном разделе — в теории измерений. Определение площади не надо смешивать с ее вычислением. Вычислять площади многих фигур люди научились давно, владея лишь интуитивными представлениями о площади. Первоначально площадь представлялась как количество единичных квадратов, которые может вместить данная фигура. Это позволило подсчитать площадь прямоугольника, длины сторон которого выражаются целыми числами m и n. Такой прямоугольник содержит mn единичных квадратов.

Поэтому естественно было считать, что число mn выражает площадь указанного прямоугольника. Затем этот результат распространили на случай, когда длины сторон прямоугольника не выражаются целыми числами или несоизмеримы с единицей длины. В результате получили формулу для вычисления площади любого прямоугольника. Впоследствии люди научились вычислять площадь параллелограмма, треугольника и многоугольника.

Было обнаружено, что площадь многоугольника обладает следующими свойствами:

1. *Площадь многоугольника — неотрицательное число.*
2. *Равные многоугольники имеют равные площади.*
3. *Площадь многоугольника, составленного из нескольких многоугольников, без общих внутренних точек, равна сумме их площадей (свойство аддитивности площади).*
4. *Площадь части многоугольника не больше площади всего многоугольника (свойство монотонности площади)*[1].
5. *Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна единице.*

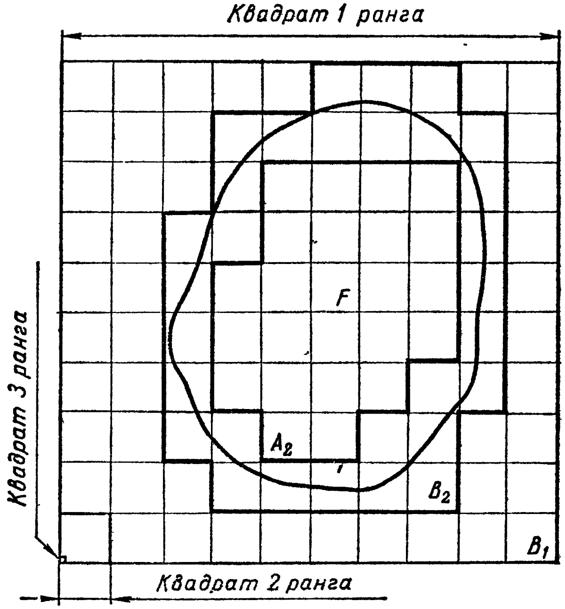
Используя понятие площади многоугольника, французский математик Камилл Жордан указал способ определения площади более широкого класса плоских фигур. Он предложил определять площадь фигуры с помощью сетки равных квадратов подобно той, которая нанесена на листе миллиметровой бумаги.

Рассмотрим фигуру F (черт. 2). Выберем в этой же плоскости некоторый квадрат (на миллиметровой бумаге таким квадратом удобно считать квадрат со стороной 1 *дм*), который примем за единичный. Проведем прямые, параллельные сторонам выбранного квадрата на расстояниях, равных его стороне. Получим сетку из равных квадратов (на миллиметровой бумаге это будут квадраты со сторонами, равными 1 *дм*). Назовем эти квадраты квадратами первого ранга. Составим из квадратов первого ранга два многоугольника: A_1[2] — из всех квадратов, целиком содержащихся в фигуре F, и B_1 — из всех квадратов, содержащих хотя бы одну точку фигуры F. Многоугольник A_1 будет содержаться в фигуре F, а многоугольник B_1 будет

[1] Свойство монотонности площади является следствием 1-го и 3-го свойств.

[2] На чертеже 2 многоугольника A_1 нет. Многоугольник B_1, содержащий фигуру F, состоит из одного квадрата.

содержать фигуру F. Затем разделим квадраты первого ранга прямыми, параллельными их сторонам, на новые квадраты со стороной, равной $\frac{1}{10}$ стороны квадрата первого ранга (на миллиметровой бумаге это будут квадраты со стороной, равной 1 *см*). Снова получим сетку



Черт. 2

равных квадратов. Назовем эти квадраты квадратами второго ранга. Из квадратов второго ранга также образуем два многоугольника: A_2 — из всех квадратов, целиком содержащихся в фигуре F, и B_2 — из всех квадратов, содержащих хотя бы одну точку фигуры F. Очевидно, многоугольник A_1 будет содержаться в многоугольнике A_2, а многоугольник B_2 — в многоугольнике B_1, т. е. $A_1 \subset A_2$ и $B_1 \supset B_2$. Далее, квадраты второго ранга разделим прямыми, параллельными их сторонам, на квадраты третьего ранга со стороной, равной $\frac{1}{10^2}$ стороны квадрата первого ранга (на миллиметровой бумаге это будут квадраты со стороной, равной 1 *мм*). Снова образуем из этих квадратов третьего ранга два многоугольника: A_3 — из всех квадратов, целиком содержащихся в фигуре F, и B_3 — из всех квадратов, содержащих хотя бы одну точку фигуры F. Очевидно,

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3$$

и

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3.$$

Продолжая указанный процесс неограниченно, получим квадраты четвертого, пятого и т. д. n-го рангов со сторонами, равными соответственно $\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \ldots, \frac{1}{10^n}$ стороны квадрата первого ранга. Образовывая из них многоугольники двух видов: A_n — из всех квадратов ранга n, целиком содержащихся в фигуре F, и B_n — из всех квадратов ранга n, содержащих хотя бы одну точку фигуры F, получим две последовательности многоугольников:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots, \tag{10}$$

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots \supseteq B_n \supseteq \ldots, \tag{11}$$

причем все многоугольники A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, будут содержаться в фигуре F, а многоугольники B_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, будут содержать фигуру F.

Обозначим через $S(A_n)$ и $S(B_n)$ соответственно площади многоугольников A_n и B_n. На основании свойства монотонности площадей многоугольников получим две монотонные числовые последовательности:

$$S(A_1) \leqslant S(A_2) \leqslant \ldots \leqslant S(A_n) \leqslant \ldots, \tag{12}$$

$$S(B_1) \geqslant S(B_2) \geqslant \ldots \geqslant S(B_n) \geqslant \ldots. \tag{13}$$

Последовательность (12) ограничена сверху, а последовательность (13) ограничена снизу.

В самом деле, многоугольник $A_n \subset B_1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, поэтому $S(A_n) \leqslant S(B_1)$, $n = 1, 2, \ldots$ Аналогично многоугольник $B_n \supset A_1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, поэтому $S(B_n) \geqslant S(A_1)$, $n = 1, 2, \ldots$. Итак, последовательность (12) не убывает и ограничена сверху, а последовательность (13) не возрастает и ограничена снизу. На основании теорем[1] о суще-

[1] См.: Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова. Алгебра и элементарные функции, ч. 1. М., «Просвещение», 1966, § 133.

ствовании пределов у монотонных и ограниченных последовательностей заключаем, что последовательности (12) и (13) сходятся, т. е. имеют пределы, которые могут и не быть равными.

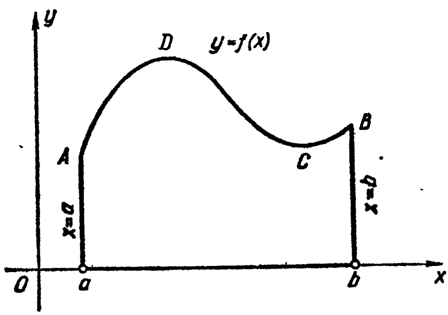
Пусть $\lim S(A_n) = S_1$ и $\lim S(B_n) = S_2$.

Если $S_1 = S_2 = S$, то фигура называется квадрируемой, а число S — ее площадью. Можно доказать, что квадрируемость фигуры не зависит от выбора единичного квадрата.

Площадь квадрируемой фигуры, определенная таким образом, обладает свойствами 1—5, аналогичными тем, которыми обладает площадь многоугольника:

1. *Площадь фигуры — неотрицательное число.*
2. *Равные фигуры имеют равные площади.*
3. *Площадь фигуры, составленной из нескольких фигур, не имеющих попарно общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур (свойство аддитивности площади).*
4. *Площадь части фигуры не больше площади всей фигуры (свойство монотонности площади).*
5. *Площадь квадрата со стороной единица равна единице.*

Можно убедиться, что если рассмотреть последовательности многоугольников вида (10) и (11) для фигур, ограниченных прямолинейными отрезками, дугами окружностей, парабол, гипербол, эллипсов и вообще дугами графиков непрерывных функций, то числа S_1 и S_2 окажутся равными. Следовательно, эти фигуры имеют площадь.



Черт. 3

В частности, *площадь имеет фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$, $(f(x) \geqslant 0)$, $x \in [a, b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью абсцисс* (черт. 3). Такую фигуру называют *криволинейной трапецией.*

Пользуясь определенным интегралом, можно указать общий и удобный для практики способ вычисления площадей.

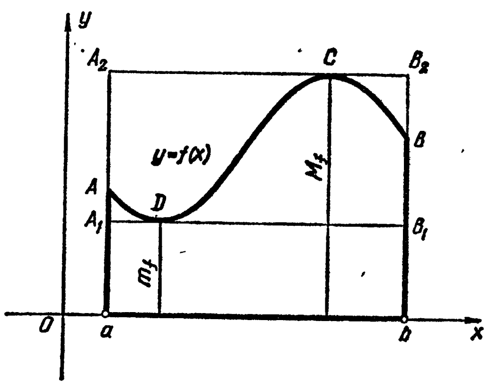
§ 6. Вычисление площади

Для дальнейшего нам понадобится известное свойство непрерывной функции. *Функция, непрерывная на сегменте, имеет на этом сегменте наибольшее и наименьшее значения*[1].

Перейдем к вычислению площади. Сначала мы научимся вычислять площадь криволинейной трапеции. При этом убедимся, что площадь криволинейной трапеции есть приращение некоторой первообразной функции и поэтому может быть выражена определенным интегралом. Затем будем вычислять площади других фигур, которые можно рассматривать составленными из криволинейных трапеций.

1. Рассмотрим криволинейную трапецию $abBCDAa$ (черт. 3).

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$, *прямыми* $x=a$, $x=b$ *и осью абсцисс, будем называть площадью под кривой* $y=f(x)$.



Черт. 4

Лемма. *Площадь* S *под кривой* $y=f(x)$, $x\in[a, b]$ *удовлетворяет двойному неравенству*

$$m_f(b-a)\leqslant S\leqslant M_f(b-a), \tag{14}$$

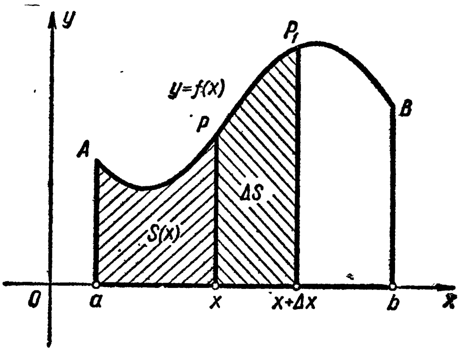
где M_f *и* m_f — *соответственно наибольшее и наименьшее значения функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$.

Доказательство. Рассмотрим криволинейную трапецию $abBCDAa$ (черт. 4). Произведение $m_f(b-a)$ выра-

[1] См.: М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. Функция, ее предел и производная. М., «Просвещение», 1968, § 50.

жает площадь прямоугольника abB_1A_1, содержащегося в криволинейной трапеции, а произведение $M_f(b-a)$ — площадь прямоугольника abB_2A_2, содержащего эту трапецию. На основании пятого свойства площади заключаем, что двойное неравенство (14) справедливо. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь криволинейную трапецию $axPAa$ (черт. 5). Обозначим ее площадь через $S(x)$. Каждому значению x из сегмента $[a, b]$ будет соответствовать определенное значение $S(x)$. Следовательно, $S(x)$ можно рассматривать как функцию, определенную на сегменте $[a, b]$. Очевидно, $S(x)$ есть неотрицательная, возрастающая функция.



Черт. 5

Теорема 1. *Площадь $S(x)$ под кривой $y=f(x)$ (на сегменте $[a,x]$) есть первообразная функции $f(x)$, т. е.*

$$S'(x)=f(x), \quad x \in [a, b].$$

Доказательство. Убедимся что функция $S(x)$ имеет производную, которая равна $f(x)$. Возьмем некоторое значение $x \in [a, b]$ и дадим ему приращение Δx ($x+\Delta x \in [a, b]$). Соответствующее приращение ΔS функции $S(x)$ будет равно площади фигуры $x(x+\Delta x)P_1Px$ (для $\Delta x > 0$; черт. 5).

По лемме при $\Delta x > 0$ выполняются неравенства:

$$m_f \Delta x \leqslant \Delta S \leqslant M_f \Delta x, \tag{15}$$

где m_f и M_f — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[x, x+\Delta x]$.

Из неравенств (15) имеем:

$$m_f \leqslant \frac{\Delta S}{\Delta x} \leqslant M_f. \tag{16}$$

Двойное неравенство (16) справедливо и при $\Delta x < 0$. Если $\Delta x < 0$, то

$$m_f |\Delta x| \leqslant |\Delta S| \leqslant M_f |\Delta x|,$$

откуда

$$m_f \leqslant \frac{|\Delta S|}{|\Delta x|} \leqslant M_f.$$

Но $S(x)$ — возрастающая функция, поэтому

$$\frac{|\Delta S|}{|\Delta x|} = \frac{\Delta S}{\Delta x}.$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x).$$

К тому же значению будут стремиться наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[x, x + \Delta x]$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_f = \lim_{\Delta x \to 0} M_f = f(x). \qquad (17)$$

Перейдя к пределу в двойном неравенстве (16) при $\Delta x \to 0$, в силу равенств (17), известной теоремы о пределах и определения производной, найдем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = S'(x) = f(x).$$

Теорема доказана.

Следствием теоремы является следующая

формула для вычисления площади

Площадь S под кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ равна определенному интегралу от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, т. е.

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (18)$$

Доказательство. Площадь S фигуры $abBP_1PAa$ (черт. 5) есть приращение функции $S(x)$ на сегменте $[a, b]$, т. е.

$$S = S(b) - S(a).$$

Но функция $S(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, поэтому по определению интеграла $S = S(b) - S(a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Равенство (18) доказано.

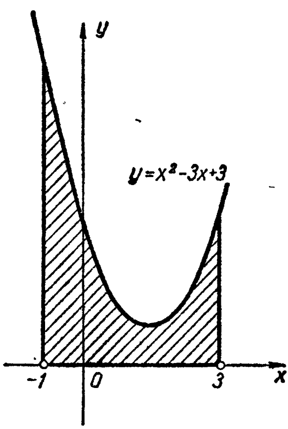
Пример 1. Вычислить площадь под кривой $y = x^2 - 3x + 3$ на сегменте $[-1, 3]$.

Решение. Функция $f(x)=x^2-3x+3$ положительна, поэтому можно воспользоваться формулой (18) для вычисления площади заданной криволинейной трапеции (черт. 6). Имеем:

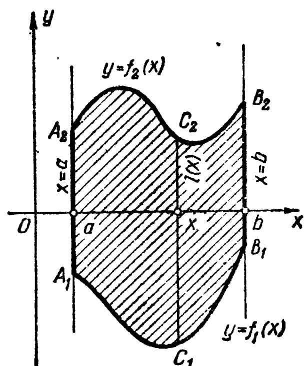
$$S=\int_{-1}^{3}(x^2-3x+3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+3x\right)\Big|_{1}^{3}=2\frac{2}{3}\ (\textit{кв. ед}).$$

Пример 2. Вычислить площадь под кривой $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ на сегменте $[-3,\ 3]$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ положительна, поэтому вычислим площадь заданной криволинейной тра-



Черт. 6



Черт. 7

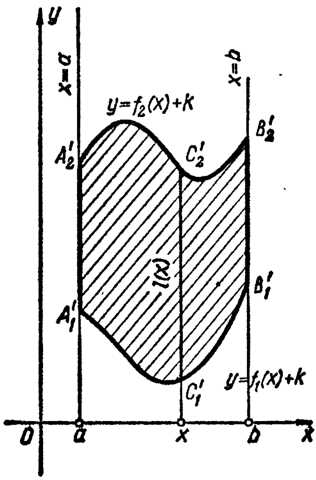
пеции по формуле (18). Используя четность функции $f(x)$ (задача 48, § 4), имеем:

$$S=\int_{-3}^{3}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\int_{0}^{3}(e^x+e^{-x})\,dx=e^x\Big|_0^3-e^{-x}\Big|_0^3=e^3-e^{-3}.$$

2. Рассмотрим теперь фигуру, ограниченную прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ и графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, непрерывных на сегменте $[a,\ b]$, причем $f_2(x)\geqslant f_1(x)$ при $x\in[a,\ b]$ (черт. 7). Обе функции ($f_1(x)$ и $f_2(x)$ (или одна из них ($f_1(x)$)) могут принимать и отрицательные значения.

Обозначим разность $f_2(x) - f_1(x)$ через $l(x)$.

Теорема 2. *Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \geqslant$ $\geqslant (f_1(x))$ и прямыми $x = a$, $x = b$, равна определенному интегралу от функции $l(x) =$ $= f_1(x) - f_2(x)$ на сегменте $[a, b]$.*



Черт. 8

$$S = \int_a^b l(x)\,dx. \qquad (19)$$

Доказательство. Произведем параллельный сдвиг фигуры в направлении оси ординат таким образом, чтобы фигура оказалась выше оси абсцисс. При этом функция $f_1(x)$ перейдет в положительную функцию $f_1(x) + k$; $f_2(x)$ — в положительную функцию $f_2(x) + k$, где k — некоторое положительное число (черт. 8). Фигуры A_1B_2 (черт. 7) и $A'_1B'_2$ (черт. 8) равны, поэтому будут равны и их площади. Но площадь фигуры $A'_1B'_2$ в силу аддитивности площади будет равна разности площадей трапеций $abB'_2A'_2a$ и $abB'_1A'_1a$. Следовательно, искомая площадь S будет равна:

$$S = \int_a^b [k + f_2(x)]\,dx - \int_a^b [k + f_1(x)]\,dx =$$

$$= \int_a^b k\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b k\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = \int_a^b l(x)\,dx.$$

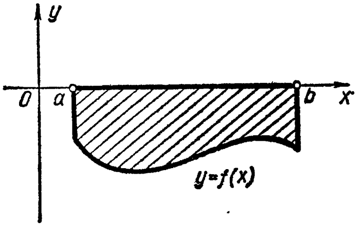
Теорема доказана.

Следствие. Если непрерывная функция $f(x)$ отрицательна на сегменте $[a, b]$, то площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (черт. 9), равна определенному интегралу

$$\int_a^b [-f(x)]\,dx.$$

Доказательство. В этом случае можно считать $f_2(x)$ равной нулю на сегменте $[a, b]$, а $f_1(x)$ — равной $f(x)$. Тогда $l(x)=f_2(x)-f_1(x)=-f(x)$, и по формуле (19) получаем, что площадь данной фигуры

$$S=\int_a^b [-f(x)]\,dx. \qquad (20)$$



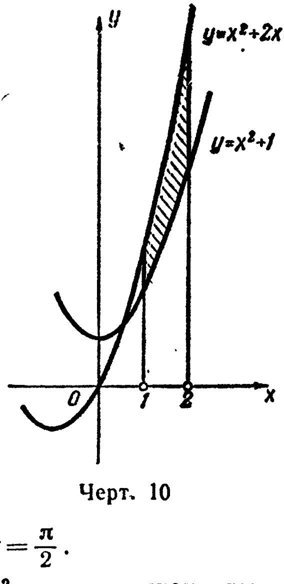
Черт. 9

Примечание. Формула (20) верна и для функции $f(x)$, неположительной на сегменте $[a, b]$.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=x^2+1$, $y=x^2+2x$ и прямыми $x=1$ и $x=2$.

Решение. На сегменте $[1, 2]$ парабола $y=x^2+2x$ расположена выше параболы $y=x^2+1$ (черт. 10). Поэтому $l(x)=(x^2+2x)-(x^2+1)=2x-1$, $x\in[1, 2]$, по формуле (19) имеем:

$$S=\int_1^2 (2x-1)\,dx=(x^2-x)\Big|_1^2=2.$$



Черт. 10

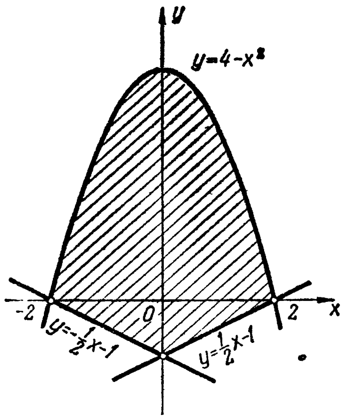
Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=1+\sin^2 x$, $y=-1-\cos^2 x$ и прямыми $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Кривая $y=1+\sin^2 x$ расположена выше кривой $y=-1-\cos^2 x$, поэтому $l(x)=(1+\sin^2 x)-(-1-\cos^2 x)=3$.

Следовательно,

$$S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,dx=3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\pi.$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4-x^2$ и прямыми $y=-\frac{1}{2}x-1$ и $y=\frac{1}{2}x-1$ (черт. 11).



Черт. 11

Решение 1. На сегменте $[-2, 0]$ функция $l(x)=(4-x^2)-\left(-\frac{1}{2}x-1\right)=-x^2+\frac{1}{2}x+5$, а на сегменте $[0, 2]$ имеем:

$$l(x)=(4-x^2)-\left(\frac{x}{2}-1\right)=-x^2-\frac{x}{2}+5,$$

поэтому искомая площадь равна:

$$S=\int\limits_{-2}^{0}\left(-x^2+\frac{1}{2}x+5\right)dx+\int\limits_0^2\left(-x^2-\frac{x}{2}+5\right)dx=12\frac{2}{3}.$$

Решение 2. В силу симметрии фигуры относительно оси ординат площадь всей фигуры равна удвоенной площади части фигуры, расположенной правее (или левее) оси ординат. Взяв правую часть, получим:

$$S=2\int\limits_0^2\left(-x^2-\frac{x}{2}+5\right)dx=2\cdot\frac{19}{3}=12\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Вычислить площадь параболического сегмента, отсекаемого от параболы $y=-2x+x^2$ осью абсцисс.

Решение. Функция $f(x) = -2x + x^2$ на сегменте $[0, 2]$ неположительна, поэтому по формуле (20) имеем:

$$S = \int_0^2 -(-2x + x^2)\,dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Упражнения

49. Вычислить площадь под кривой $y = x^3$ на сегменте $[0, 3]$.

50. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $2x + y - 2 = 0$, $x = -5$ и $y = 0$.

Указание. Из уравнения прямой выразить y через x.

51. Вычислить площадь под кривой $y = x^2 + 2$ на сегменте $[-3, 3]$.

52. Вычислить площадь под кривой $y = 2^x$ на сегменте $[0, \log_2 5]$.

53. При каких значениях k площадь под кривой $y = x^2 - 2kx + 9$ на любом сегменте $[a, b]$ можно вычислить по формуле (18)?

54. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y = x^2$, прямыми $x = 1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

55. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y = x^2$, прямой $x = b$, $b > 0$ и осью абсцисс.

56. Вычислить площадь параболического сегмента, отсекаемого от параболы $y = 2x - x^2$ прямой $y = -3$.

57. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$, и прямой $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

58. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой косинусоиды $y = \cos\frac{x}{2}$, прямыми $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$ и осью абсцисс.

59. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой кубической параболы $y = x^3$, прямой $x = 2$ и осью абсцисс.

60. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой синусоиды $y = \sin x$, где $0 \leqslant x \leqslant \pi$, и осью абсцисс.

61. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугами парабол $y = x^2$, $y = x^2 + 2$ и прямыми $x = 1$, $x = 3$.

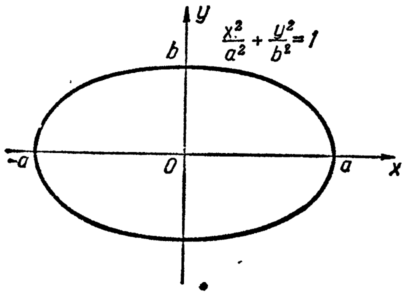
62. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 4$, прямыми $x = 2$, $x = 3$ и осью абсцисс.

Указание. См. формулу 2 таблицы первообразных.

63. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью ординат, прямой $y=1$ и дугой параболы $y=x^2$.

64. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y=2x-x^2+3$ и прямой $y=4x$.

65. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-4$ и осью абсцисс.



Черт. 12

66. Убедиться, что площадь круга радиуса R равна πR^2.

Указание. Рассмотреть круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=R^2$, воспользоваться формулой таблицы первообразных.

67. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (черт. 12).

68. Вычислить площадь сегмента, ограниченного дугой окружности $x^2+y^2=4$ и прямой $y=1$.

§ 7. Что такое объем тела и как его вычислять?

Понятие объема тела, так же как и понятие площади изучается в теории измерений. Первоначальное представление о величине объема тела было связано с количеством единичных кубов, которое вмещает данное тело. Это позволило подсчитать объем прямоугольного параллелепипеда, длины ребер которого выражаются целыми числам a, b, c. Объем такого параллелепипеда оказался равным произведению этих чисел, т. е. числу abc. В дальнейшем используя различные приемы, не располагая при этом научным определением объема, люди нашли формулу для вычисления объемов тех многогранников, которые встречались в их практической деятельности.

Было обнаружено, что объем многогранника обладает следующими свойствами:

1. *Объем многогранника есть неотрицательное число.*
2. *Равные многогранники имеют равные объемы.*

3. *Объем многогранника, составленного из нескольких многогранников, не имеющих попарно общих внутренних точек, равен сумме объемов этих многогранников (свойство аддитивности объема).*

4. *Объем части многогранника не больше объема всего многогранника (свойство монотонности объема).*

5. *Объем куба, длина ребра которого равна единице, равен единице.*

Очевидно, свойство монотонности объема является следствием свойств 1-го и 3-го.

Используя понятие объема многогранника, Жордан указал способ определения объема более широкого класса тел. Для определения объема тела по Жордану нужно строить сетку равных кубов в пространстве, подобно тому как это делалось с квадратами при определении площади. Рекомендуем читателю представить этот процесс. В результате получим две последовательности многогранников, составленных из равных кубов: $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$, причем Q_n будет содержать данное тело, а P_n — содержаться в нем. Обозначим через $V(P_n)$ и $V(Q_n)$ соответственно объемы многогранников P_n и Q_n. На основании свойства монотонности объемов многогранников получим две монотонные последовательности чисел:

$$V(P_1) \leqslant V(P_2) \leqslant \ldots \leqslant V(P_n) \leqslant \ldots, \tag{21}$$

$$V(Q_1) \geqslant V(Q_2) \geqslant \ldots \geqslant V(Q_n) \geqslant \ldots . \tag{22}$$

Последовательность (21) ограничена сверху (числом $V(Q_1)$), а последовательность (22) ограничена снизу (числом $V(P_1)$). Поэтому последовательности (21) и (22) имеют пределы (не обязательно равные друг другу).

Пусть

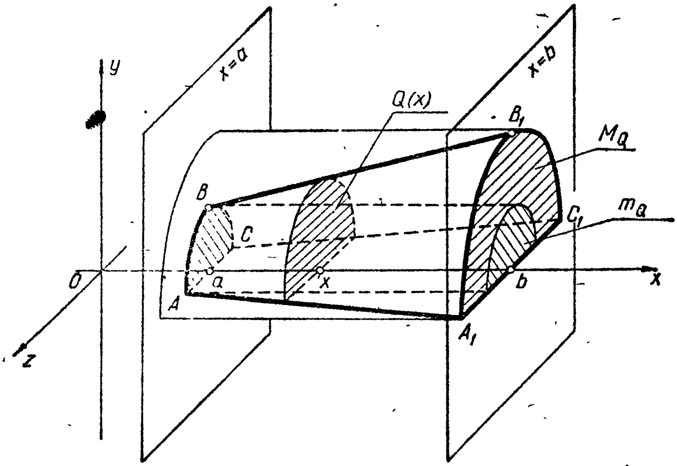
$$\lim V(P_n) = V_1 \text{ и } \lim V(Q_n) = V_2.$$

Если $V_1 = V_2 = V$, то тело называют кубируемым, а число V — его объемом.

Можно доказать, что кубируемость тела не зависит от выбора единичного куба. Объем тела, определенный таким образом, обладает свойствами 1—5, аналогичными свойствам объема многогранника. Сформулируйте эти свойства.

Можно убедиться, что если рассмотреть такие последовательности многогранников для шара, прямого цилиндра, конуса, то числа V_1 и V_2 окажутся равными. Таким образом убедимся, что эти тела имеют объем.

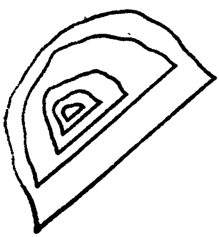
При этом *объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.*



Черт. 13

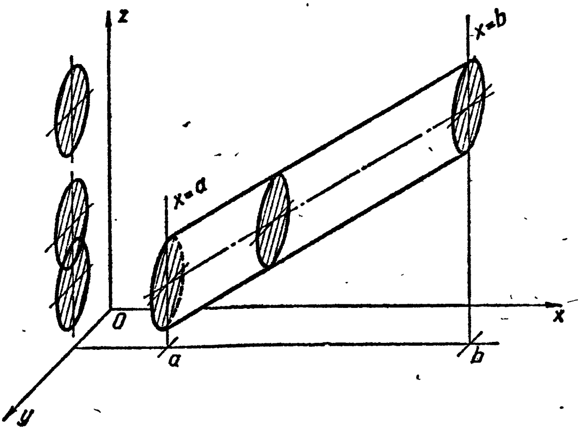
Для вычисления объемов тел используется также понятие определенного интеграла.

Рассмотрим тело, ограниченное двумя опорными плоскостями, перпендикулярными оси Ox в точках a и b ($a < b$) (черт. 13). Возьмем некоторое значение x на сегменте $[a, b]$ и проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную оси Ox. *Будем предполагать, что для этого тела ортогональные проекции любой пары поперечных сечений на опорные плоскости целиком содержатся одна в другой* (черт. 14). Обозначим через $Q(x)$ площадь поперечного сечения тела, проходящего через точку x.



Черт. 14

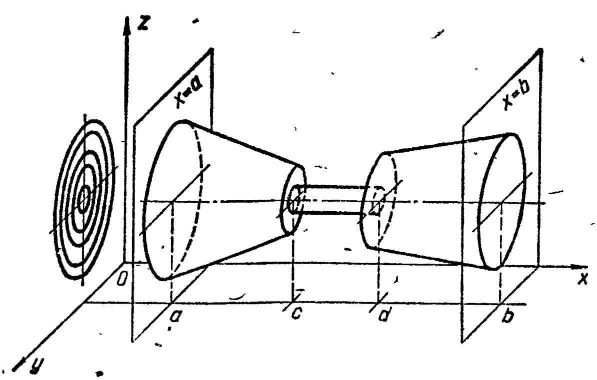
Каждому значению x из сегмента $[a, b]$ будет соответствовать определенное значение $Q(x)$. Возникает неотрицательная функция. *Будем считать функцию $Q(x)$ непрерывной.* Будучи непрерывной на сегменте $[a, b]$, она имеет на нем наибольшее и наименьшее значения, т. е. существуют поперечные сечения наибольшей и наименьшей площади. Тело, для которого ортогональные проекции любой пары поперечных сечений на опорные плоскости целиком содержатся одна в другой и для которого функция $Q(x$



Черт. 15

является непрерывной, будем называть *телом с допустимым поперечным сечением.*

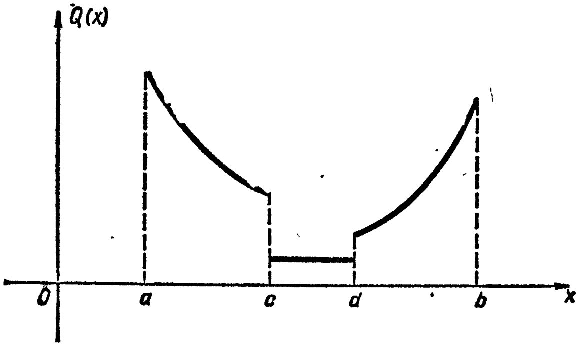
Очевидно, тело, изображенное на чертеже 15, не является телом с допустимым поперечным сечением, так как для него ортогональные проекции поперечных сечений на опорные плоскости не содержатся одна в другой.



Черт. 16

Тело, изображенное на чертеже 16, также не может быть телом с допустимым поперечным сечением, хотя ортогональные проекции любой пары его поперечного сечений на опорные плоскости содержатся одна в другом Функция $Q(x)$, выражающая площадь поперечного сечения этого тела, не является непрерывной. Ее график изображен на чертеже 17.

Доказано, что *тело с допустимым поперечным сечением имеет объем*. Найдем формулу для вычисления его объема



Черт. 17

Лемма. *Объем V тела с допустимым поперечным сечением удовлетворяет двойному неравенству*

$$m_Q(b-a) \leqslant V \leqslant M_Q(b-a),\quad b-a>0,$$

где m_Q и M_Q — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $Q(x)$ на сегменте $[a, b]$.

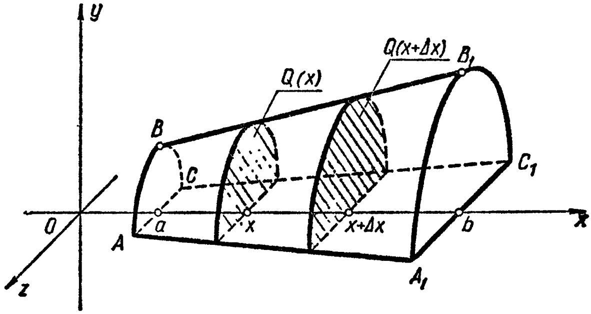
Доказательство совпадает с доказательством леммы §6 только вместо площадей здесь нужно рассматривать объемы тел, причем произведения $m_Q(b-a)$ и $M_Q(b-a)$ суть объемы цилиндров, направляющими которых соответственно являются контуры наименьшего и наибольшего поперечных сечений, а образующие параллельны оси абсцисс (черт. 13). Рекомендуем читателю провести полное доказательство леммы.

Далее, плоскость, проходящая через точку x и перпендикулярная оси Ox, отсечет от тела A_1B некоторую часть, соответствующую сегменту $[a, x]$. Обозначим объем этой части тела через $V(x)$ (черт. 18). Каждому значению $x \in [a, b]$ будет соответствовать определенное значение $V(x)$. Возникает положительная возрастающая функция $V(x)$.

Теорема. *Функция $V(x)$, выражающая объем соответствующей части тела с допустимым поперечным сечением $Q(x)$, есть первообразная функции $Q(x)$:*

$$V'(x) = Q(x), \quad x \in [a, b].$$

Доказательство. Убедимся, что функция $V(x)$ имеет производную, которая равна $Q(x)$. Дадим x приращение $\Delta x > 0$, $(x + \Delta x \in [a, b])$ (черт. 18). Функция $V(x)$



Черт. 18

получит приращение ΔV. По условию функция $Q(x)$ непрерывна. Обозначим через M_Q и m_Q соответственно ее наибольшее и наименьшее значения на сегменте $[x, x + \Delta x]$. При $\Delta x \to 0$ функция $Q(x + \Delta x)$ в силу непрерывности имеет пределом $Q(x)$. К тому же значению будут стремиться M_Q и m_Q, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} m_Q = \lim_{\Delta x \to 0} M_Q = Q(x). \tag{23}$$

По доказанной лемме для $\Delta x > 0$ выполняются неравенства

$$m_Q \Delta x \leqslant \Delta V(x) \leqslant M_Q \Delta x, \tag{24}$$

откуда имеем:

$$m_Q \leqslant \frac{\Delta V}{\Delta x} \leqslant M_Q. \tag{25}$$

Так же как при доказательстве теоремы § 6, можно убедиться, что для возрастающей функции $V(x)$ неравенство (25) справедливо и при отрицательном Δx.

Перейдя к пределу в двойном неравенстве (25) при $\Delta x \to 0$, в силу равенств (23), определения производной и известной теоремы о пределах, получим равенство:

$$V'(x) = Q(x), \quad x \in [a, b].$$

Теорема доказана.

Следствием доказанной теоремы является следующая формула для вычисления объема.

Объем V тела с допустимым поперечным сечением $Q(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ равен определенному интегралу на сегменте $[a, b]$ от функции $Q(x)$:

$$V = \int_a^b Q(x)\,dx. \tag{26}$$

Доказательство. Этот объем можно рассматривать как приращение функции $V(x)$ на сегменте $[a, b]$, т. е. как $V(b) - V(a)$. Но так как функция $V(x)$ есть первообразная для $Q(x)$, то объем V равен $\int_a^b Q(x)\,dx$, т.е. справедлива формула (26).

Заметим, что формула (26) применима для вычисления объемов более широкого класса тел, чем тела с допустимым поперечным сечением. Обращаем внимание также на некоторую аналогию формул (19) и (26) для вычисления площади и объема:

$$S = \int_a^b l(x)\,dx; \quad V = \int_a^b Q(x)\,dx.$$

Пример 1. Вычислить объем V пирамиды по ее высоте H и площади основания S.

Решение. Направим ось Ox вниз по высоте пирамиды, приняв вершину пирамиды за начало координат. Рассмотрим поперечное сечение, перпендикулярное оси Ox и отстоящее от вершины на расстояние x. Площадь этого сечения обозначим через $Q(x)$. Как известно,

$$\frac{Q(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2}, \tag{2}$$

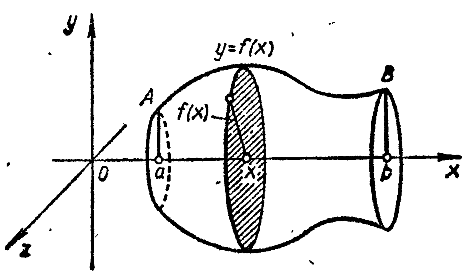
откуда $Q(x)=\frac{S}{H^2}x^2$, где $x\in[0,\ H]$. $Q(x)$ есть непрерывная функция, и проекции поперечных сечений на основание пирамиды содержатся одна в другой. Поэтому пирамида является телом с допустимым поперечным сечением, и ее объем можно вычислять по формуле (26), имеем:

$$V=\int_0^H \frac{S}{H^2}x^2\,dx=\frac{1}{3}\frac{S}{H^2}x^3\Big|_0^H=\frac{1}{3}SH,$$

т. е.

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

Пример 2. Доказать, что объем V тела, образованного вращением криволинейной трапеции $abBAa$ (черт. 19)



Черт. 19

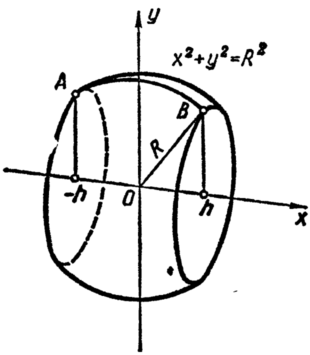
вокруг оси Ox ($f(x)\geqslant 0$), равен определенному интегралу:

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{28}$$

Доказательство. Поперечное сечение, перпендикулярное оси вращения в точке x, — круг с радиусом, равным $f(x)$, и его площадь $Q(x)$ равна $Q(x)=\pi[f(x)]^2$. Легко убедиться, что данное тело вращения есть тело с допустимым поперечным сечением. Подставляя значение $Q(x)$ в формулу (26), получим формулу для вычисления объема тела вращения — формулу (28).

Пример 3. Вычислить объем шарового слоя шара радиуса R, центр которого служит центром симметрии этого слоя (черт. 20).

Решение. Указанный шаровой слой образуется вращением трапеции $(-h)hBA(-h)$ вокруг оси Ox. Криволинейная сторона трапеции является дугой окружности $x^2+y^2=R^2$. Поэтому



Черт. 20

$$[f(x)]^2=R^2-x^2,$$

ибо $f(x)=y$.

По формуле (28) найдем искомый объем V:

$$V=\int_{-h}^{h}\pi(R^2-x^2)\,dx=$$

$$=\pi R^2x\Big|_{-h}^{h}-\frac{\pi x^3}{3}\Big|_{-h}^{h}=$$

$$=2\pi h\left(R^2-\frac{h^2}{3}\right)$$

При $h=R$ получим объем шара: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Упражнения

69. Вычислить объем усеченной пирамиды с высотой H, основания которой параллельны и их площади соответственно равны Q и q.

70. Вычислить объем кругового конуса с радиусом основания R и высотой H (два решения).

71. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной первой полуволной синусоиды и осью абсцисс.

72. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной параболами $y^2=x$ и $y=x^2$.

73. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной дугой гиперболы $xy=2$, прямыми $x=1$, $x=2$ и осью абсцисс.

74. Точка пересечения диагоналей квадрата перемещается вдоль диаметра круга радиуса a, при этом плоскость, в которой лежит квадрат, все время остается перпендикулярной плоскости круга, а две противоположные

вершины квадрата перемещаются по окружности. Вычислить объем тела, образуемого этим движущимся квадратом.

Указание. Рассмотреть окружность $x^2+y^2=a^2$. Поперечное сечение тела представляет собой квадрат со стороной $y\sqrt{2}$.

§ 8. Принцип Кавальери и формулы Симпсона

С помощью определенного интеграла доказываются известный принцип Кавальери[1] и формулы Симпсона[2] для вычисления площадей и объемов тел с допустимым поперечным сечением.

1. Принцип Кавальери. *Если два тела содержатся между двумя параллельными плоскостями и обладают тем свойством, что при пересечении их любой плоскостью, параллельной этим плоскостям, получаются фигуры, имеющие одинаковые площади, то объемы тел равны.*

Доказательство. Докажем принцип Кавальери для тел с допустимыми поперечными сечениями. Пусть тела T_1 и T_2 удовлетворяют высказанным условиям. Параллельные плоскости P_1 и P_2, ограничивающие тела, можно считать опорными. Пусть расстояние от плоскости P_1 до плоскости P_2 равно H. Направим ось Ox перпендикулярно плоскостям P_1 и P_2 и обозначим соответственно через $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ площади сечений, получаемых при пересечении тел T_1 и T_2 плоскостью P, параллельной плоскостям P_1 и P_2 и отстоящей от плоскости P_1 на расстояние x, $x\in[0,\ H]$. По условию площади сечений равны

$$Q_1(x)=Q_2(x), \qquad x\in[0,\ H].$$

В таком случае будет справедливо равенство $\int\limits_a^b Q_1(x)\,dx = \int\limits_a^b Q_2(x)\,dx$. А это и означает, что объемы тел T_1 и T_2 равны. Утверждение доказано.

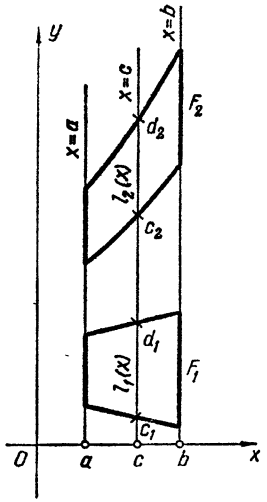
---

[1] Б. Кавальери (1591—1647) — итальянский математик.
[2] Г. Симпсон (1710—1761) — английский математик.

Принцип Кавальери применим также и к площад плоских фигур.

Если две плоские фигуры содержатся между двумя параллельными прямыми и обладают тем свойством, что в сечении их любой прямой, параллельной этим прямым, получаются равные отрезки, то площади фигур равны

Доказательство. Пусть имеем две плоские фигуры F_1 и F_2, для которых выполняются условия, сформулированные в принципе Кавальери. Направим ось ординат параллельно указанным прямым (черт. 21). Тогда отрезки c_1d_1 и c_2d_2, лежащие на прямой $x=c$, будут равны, т. е. на сегменте $[a, b]$ будет выполняться равенство $l_1(x)=l_2(x)$.



Черт. 21

Поэтому

$$\int_a^b l_1(x)\,dx=\int_a^b l_2(x)\,dx,$$

а это согласно формуле (19) означает, что площади фигур F_1 и F_2 равны. Утверждение доказано.

2. Формулы Симпсона. Лемма. *Если подынтегральная функция $f(x)$ есть квадратный трехчлен, то справедливо равенство:*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \qquad (29)$$

Доказательство. Пусть $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Тогда

$$\int_a^b(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx=\alpha\frac{b^3-a^3}{3}+\beta\frac{b^2-a^2}{2}+\gamma(b-a)=$$

$$=\frac{b-a}{6}\left[2\alpha(b^2+ab+a^2)+3\beta(b+a)+6\gamma\right].$$

Правую часть последнего равенства можно представить в виде

$$\frac{b-a}{6}\left\{(\alpha a^2+\beta a+\gamma)+4\left[\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\beta\frac{a+b}{2}+\gamma\right]+\right.$$
$$\left.+(\alpha b^2+\beta b+\gamma)=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\right..$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы непосредственно получаются следующие формулы Симпсона.

Первая формула Симпсона.

Площадь S под квадратной параболой $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $x\in[a, b]$ выражается формулой:

$$S=\frac{b-a}{6}[y_н+4y_с+y_к], \tag{30}$$

где $y_н=y(a)$ — начальная, $y_с=y\left(\frac{a+b}{2}\right)$ — средняя а $y_к=y(b)$ — конечная ординаты криволинейной трапеции, ограниченной сверху параболой.

Доказательство. Площадь S под параболой $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma\geqslant 0$, $x\in[a, b]$ вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx.$$

Откуда по лемме следует, что

$$S=\frac{b-a}{6}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right],$$

или

$$S=\frac{b-a}{6}(y_н+4y_с+y_к).$$

Формула (30) называется первой формулой Симпсона. Таким образом, *площадь под квадратной параболой равна одной шестой произведения основания криволинейной трапеции на сумму начальной, конечной и учетверенной средней ординат трапеции.*

Пример. Вычислить площадь под параболой $y=2x^2-3x+5$ на сегменте $[-1, 1]$.

Решение. Здесь $y>0$, $a=-1$, $b=1$, $\frac{a+b}{2}=0$, $b-a=2$.

Поэтому имеем: $y_н=f(-1)=10$, $y_с=f(0)=5$, $y_к=f(1)=4$.

Пользуясь формулой (30), получим:

$$S = \frac{2}{6}(10 + 4\cdot 5 + 4) = 11\frac{1}{3}.$$

Вторая формула Симпсона.

Объем тела, площадь поперечного сечения $Q(x)$ которого на сегменте $[a, b]$ есть квадратный трехчлен, выражается формулой:

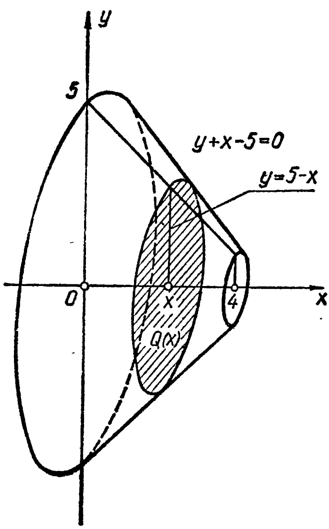
$$V = \frac{b-a}{6}\left[Q_{н} + 4Q_{с} + Q_{к}\right], \tag{31}$$

где $Q_{н} = Q(a)$, $Q_{с} = Q\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $Q_{к} = Q(b)$ — *соответственно площади начального, среднего и конечного сечений тела.*

Доказательство.

Пусть площадь поперечного сечения тела равна $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in [a, b]$. По предположению тело будет с допустимым поперечным сечением, поэтому его объем V может быть вычислен по формуле: $V = \int_a^b Q(x)\,dx$. Таким образом, $V = \int_a^b (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx$, откуда по лемме следует, что

$$V = \frac{b-a}{6}(Q_{н} + 4Q_{с} + Q_{к}). \ (31)$$



Черт. 22

Формула (31) называется второй формулой Симпсона. Очевидно, высота тела равна $b - a$, поэтому *объем тела, площадь поперечного сечения которого выражается многочленом второй степени, равен одной шестой произведения высоты тела на сумму площадей конечного, начального и учетверенного среднего поперечных сечений тела.*

Пример. Трапеция ограничена прямыми $y + x - 5 = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$. Найти объем усеченного конуса, полученного от вращения этой трапеции вокруг оси Ox.

Решение. Площадь $Q(x)$ поперечного сечения усеченного конуса (черт. 22) есть площадь круга радиуса

$y=5-x$. Следовательно, $Q(x)=\pi(5-x)^2=\pi(x^2-10x+25)$, т. е. $Q(x)$ выражается квадратным трехчленом. Поэтому для вычисления объема можно воспользоваться второй формулой Симпсона (31). Здесь $a=0$, $b=4$, $\frac{a+b}{2}=2$, $b-a=4$. Далее, $Q_н=25\pi$, $Q_с=9\pi$, $Q_к=\pi$. Подставив эти значения в формулу (31), найдем искомый объем:

$$V=\frac{2\pi}{3}(25+4\cdot 9+1)=41\frac{1}{3}\pi.$$

§ 9. Приложения определенного интеграла к механике и физике

1. Сюда относятся задачи, которые могут быть получены из задач, приводящих к понятию производной.

а) Вычисление пути.

Задача. Тело движется прямолинейно. Найти путь, пройденный этим телом за время от $t=t_1$ до $t=t_2$, если тело движется со скоростью $v(t)$, где $v(t)$ — непрерывная функция.

Решение. По определению скорость $v(t)$ есть производная от пройденного пути $S(t)$ по времени: $v(t)=S'(t)$. Иными словами, функция $S(t)$ есть первообразная для функции $v(t)$. Путь S, пройденный телом за время от $t=t_1$ до $t=t_2$, есть приращение этой первообразной на сегменте $[t_1, t_2]$. Поэтому для вычисления пути справедлива формула

$$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \qquad (32)$$

Итак, *при прямолинейном движении со скоростью $v(t)$ путь, пройденный телом за время от t_1 до t_2, равен определенному интегралу от функции $v(t)$, взятому в пределах от t_1 до t_2.*

Пример. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=3t^2-2t+1$ (*м/сек*). Найти путь, пройденный телом за первые 5 секунд.

Решение. По формуле (32) имеем:

$$S=\int_0^5 (3t^2-2t+1)\,dt=105 \text{ (м)}.$$

б) Вычисление массы стержня.

Задача. Найти массу прямолинейного стержня на участке от $l=l_1$ до $l=l_2$, если его линейная плотность $\delta(l)$ есть непрерывная функции l.

Решение. По определению линейная плотность стержня равна производной массы $m(l)$ по его длине, т. е. $\delta(l)=m'(l)$. Иными словами, функция $m(l)$ является первообразной для функции $\delta(l)$. Масса стержня на участке от $l=l_1$ до $l=l_2$ есть приращение этой первообразной на сегменте $[l_1, l_2]$. В таком случае для вычисления массы справедлива формула:

$$m=\int_{l_1}^{l_2}\delta(l)\,dl. \tag{33}$$

Итак, *масса прямолинейного стержня длины l с линейной плотностью $\delta(l)$ равна определенному интегралу от функции $\delta(l)$, взятому в пределах от l_1 до l_2 $(l_2-l_1=l)$.*

Пример. Найти массу прямолинейного стержня длины 10 *м*, если его линейная плотность задана функцией

$$\delta(l)=2l+3\left(\frac{кг}{м}\right),\quad 0\leqslant l\leqslant 10.$$

Решение. По формуле (33) имеем:

$$m=\int_0^{10}(2l+3)\,dl=130\ (кг).$$

в) Вычисление количества электричества.

Задача. Найти количество электричества, прошедшего через поперечное сечение проводника от момента времени $t=t_1$ до момента времени $t=t_2$, если величина тока $I(t)$ есть непрерывная функция t.

Решение. По определению величина тока $I(t)$ равна производной от количества электричества $Q(t)$ по времени, т. е. $I(t)=Q'(t)$. Иными словами, функция $Q(t)$ есть первообразная функции $I(t)$, а количество электричества Q, прошедшее через поперечное сечение проводника за время от $t=t_1$ до $t=t_2$, есть приращение этой первообразной и может быть вычислено по формуле:

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}I(t)\,dt. \tag{34}$$

Итак, *количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время от $t = t_1$ до $t = t_2$, по которому течет ток величины $I(t)$, равен определенному интегралу от функции $I(t)$, взятому в пределах от $t = t_1$ до $t = t_2$.*

Пример. В течение первых 6 секунд величина тока в проводнике изменялась по закону $I(t) = 4t^3 + 2\,(a)$. Какое количество электричества прошло через проводник за это время?

Решение. По формуле (34) имеем:

$$Q = \int_0^6 (4t^3 + 2)\,dt = 1308\ \kappa.$$

Упражнения

75. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t + 1\left(\frac{м}{сек}\right)$. Найти путь, пройденный телом за промежуток времени от $t_1 = 1$ *сек* до $t_2 = 3$ *сек*.

76. Линейная плотность $\delta(l)$ неоднородного стержня длиной в 35 *см* изменяется по закону $\delta(l) = 4l + 3\left(\frac{кг}{м}\right)$. Найти массу стержня.

77. Величина тока изменяется по закону $I(t) = 4t + 1$ (ампер).

Найти количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 10$ *сек*.

78. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t + a\left(\frac{м}{сек}\right)$. Найти a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ *сек* тело прошло путь длиной 40 *м*

2. Вычисление работы. Подобно тому как в геометрии вводится понятие площади и объема, в физике вводится понятие работы, давления. Для вычисления работы переменной силы и давления жидкости можно также использовать понятие определенного интеграла. Рассмотрим сначала вычисление работы.

Пусть материальная точка под действием переменной силы $F(x)$ перемещается вдоль оси Ox от точки a до точки b.

Предположим, что направление силы совпадает с направлением движения материальной точки. Сила $F(x)$

является функцией от x, определенной на сегменте $[a, b]$, которую будем считать непрерывной.

Лемма. *Если материальная точка движется вдоль оси Ox под действием силы $F(x)$, которая направлена также вдоль этой оси и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то работа A, произведенная этой силой на участке пути от a до b, удовлетворяет двойному неравенству:*

$$m_F(b-a) \leqslant A \leqslant M_F(b-a), \quad b-a > 0, \tag{35}$$

где m_F и M_F — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $F(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Доказательство. Очевидно, $m_F \leqslant F(x) \leqslant M_F$. Поэтому и работа, произведенная силами m_F, $F(x)$ и M_F на одном и том же участке $[a, b]$, удовлетворяет двойному неравенству (35). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функцию $A(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, выражающую величину работы, произведенную силой на участке пути от a до x. Заметим, что $A(x)$ — положительная и возрастающая функция.

Теорема. *Если материальная точка движется вдоль оси Ox под действием силы $F(x)$, которая направлена также вдоль этой оси и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то работа $A(x)$, произведенная этой силой на участке пути от a до x, есть первообразная функции $F(x)$:*

$$A'(x) = F(x), \quad x \in [a, b]. \tag{36}$$

Доказательство. Докажем, что функция $A(x)$ имеет производную, которая равна $F(x)$. Дадим x некоторое приращение Δx ($x + \Delta x \in [a, b]$). Получим соответствующее значение ΔA:

$$\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x).$$

Согласно лемме ΔA удовлетворяет двойному неравенству для $\Delta x > 0$:

$$m_F \Delta x \leqslant \Delta A \leqslant M_F \Delta x, \tag{37}$$

где m_F и M_F — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $F(x)$ на сегменте $[x, x + \Delta x]$.

Из двойного неравенства (37) следует двойное неравенство $m_F \leqslant \frac{\Delta A}{\Delta x} \leqslant M_F$, справедливое для любого Δx.

Перейдя в последнем неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, используя при этом непрерывность функции $F(x)$ и повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены при доказательстве теорем § 6 и § 7, придем к равенству (36). Теорема доказана.

Следствие. *Работа A, произведенная силой $F(x)$, направленной вдоль оси Ox, при перемещении материальной точки вдоль этой оси от a до b, равна определенному интегралу на сегменте $[a, b]$ от функции $F(x)$, т. е.*

$$A = \int_a^b F(x)\,dx. \tag{38}$$

Доказательство. Работа, произведенная силой $F(x)$ на участке пути от a до b, есть приращение функции $A(x)$ на этом участке, т. е. $A = A(b) - A(a)$.

Из определения интеграла и равенства (36) следует формула (38).

Пример 1. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 *см*, если известно, что действующая сила пропорциональна сжатию пружины[1] и что для сжатия на 1 *см* необходима сила в 30 *н*.

Решение. Обозначим через S величину сжатия пружины и через $F(S)$ — силу сжатия. Тогда по закону Гука

$$F(S) = kS, \quad 0 \leqslant S \leqslant 0{,}15 \ (\textit{м}).$$

Коэффициент k определим из условия, что для сжатия на 0,01 *м* необходима сила в 30 *н*. Имеем: $30 = k \cdot 0{,}01$, откуда находим $k = 3 \cdot 10^3 \frac{\textit{н}}{\textit{м}}$, поэтому $F(S) = 3 \cdot 10^3 S$ *н*, $0 \leqslant S \leqslant 0{,}15$ *м*. Сила $F(S)$ постоянна по направлению, и функция $F(S)$ непрерывна. Поэтому для вычисления работы можно воспользоваться формулой (38). Имеем:

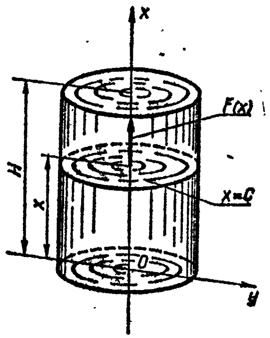
$$A = \int_0^{0{,}15} 3 \cdot 10^3 S\,dS = 15 \cdot 10^2 S^2 \Big|_0^{0{,}15} = 33{,}75 \ (\textit{дж}).$$

Пример 2. Вычислить работу, затраченную на выкачивание бензина из цистерны, имеющей форму цилин-

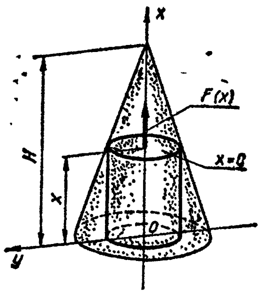
[1] Этот закон называется законом Гука.

дрического резервуара высотой H м и радиусом основания R м. Удельный вес бензина $\delta = 78 \cdot 10^3 \frac{н}{м^3}$.

Решение. Выберем ось Ox в направлении действующей силы $F(x)$ (черт. 23). Величина силы $F(x)$ для сечения цилиндра плоскостью $x = \text{const}$ определяется весом слоя бензина, верхнего по отношению к этому сечению, т. е. $F(x) = \pi R^2 \delta (H - x)$, $x \in [0, H]$. Так как



Черт. 23



Черт. 24

функция $F(x)$ непрерывна, то для вычисления работы пользуемся формулой (38). Имеем:

$$A = \int_0^H \delta\pi R^2 (H - x)\,dx = \frac{\delta\pi R^2}{2}\left[-(H-x)^2 \Big|_0^H\right] =$$
$$\doteq 39 \cdot 10^2 \pi R^2 H^2 \ (дж).$$

Пример 3. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы высотой H м и радиусом основания R м. Удельный вес песка $2 \cdot 10^4 \frac{н}{м^3}$.

Решение. Выберем ось Ox в направлений действующей силы $F(x)$ (черт. 24). Величина силы $F(x)$ для сечения конуса плоскостью $x = \text{const}$ определяется весом цилиндрического слоя песка высоты x, площадь основания которого равна площади этого сечения (черт. 24), т. е.

$$F(x) = \delta \frac{\pi R^2}{H^2}(H - x)^2 x, \quad x \in [0, H].$$

По формуле (38) получим:

$$A=\int_0^H \frac{\delta\pi R^2}{H^2}(H-x)^2 x\,dx=$$

$$=\frac{\pi R^2\delta}{H^2}\left(\frac{H^2x^2}{2}-\frac{2}{3}Hx^3+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H=\frac{5\pi R^3H^2}{3}10^3 \ (дж).$$

3. Вычисление силы давления жидкости. Пусть плоская пластинка высоты H погружена в жидкость таким образом, что ее верхний край касается поверхности жидкости. Подсчитаем силу давления жидкости на эту пластинку. Расположим оси координат, как указано на чертеже 25, т. е. так, чтобы ось Oy была направлена по свободной поверхности жидкости. По закону Паскаля давление жидкости действует во все стороны равномерно и не зависит от расположения площадки на глубине x. Поэтому сила давления $q(x)$ на частицы пластинки, находящиеся на глубине x, равна весу столба жидкости над этими частицами. Чтобы подсчитать эту силу давления $q(x)$, проведем прямую, перпендикулярную оси Ox и отстоящую на расстоянии x от поверхности жидкости. Она пересечет пластинку по отрезку cd, длину которого обозначим через $l(x)$. Очевидно,

$$q(x)=\delta l(x)\cdot x, \quad x\in[0,\ H], \tag{39}$$

где δ — удельный вес жидкости. Будем считать функцию $q(x)$ непрерывной.

Обозначим далее через $P(x)$ силу давления жидкости на часть пластинки, отсеченную от нее отрезком cd (считая от поверхности жидкости). Каждому значению $x\in[0,\ H]$ будет соответствовать значение $P(x)$, возникает возрастающая функция $P(x)$.

Теорема. *Если сила давления $q(x)$ на частицы горизонтального слоя пластинки, погруженной вертикально в жидкость, находящегося на глубине x, есть непрерывная функция на сегменте $[0, H]$, то сила давления $P(x)$ на погруженную в жидкость часть пластинки высоты x (считая от поверхности жидкости) есть первообразная функции $q(x)$, т. е.*

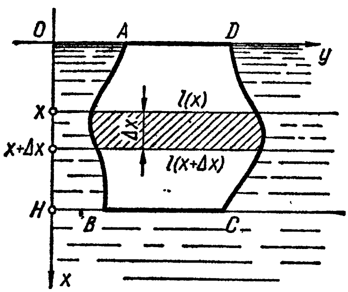
$$P'(x)=q(x), \quad x\in[0,\ H]. \tag{40}$$

Доказательство. Убедимся, что функция $P(x)$ имеет производную, которая равна $q(x)$. Дадим x

произвольное приращение $\Delta x \, (x + \Delta x \in [0, H])$ и рассмотрим соответствующее приращение $\Delta P = P(x+\Delta x) - P(x)$, которое выражает силу давления жидкости на пластину высотой Δx, ограниченную параллельными отрезками длины $l(x)$ и $l(x+\Delta x)$ (черт. 25). Нетрудно убедиться, что приращение силы давления удовлетворяет двойному неравенству

$$m_q \Delta x \leqslant \Delta P \leqslant M_q \Delta x, \tag{41}$$

где m_q и M_q[1] суть наименьшее и наибольшее значения функции $q(x)$ на сегменте $[x, x+\Delta x]$. Из неравенства (41), повторяя знакомые рассуждения, найдем, что



Черт. 25

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = q(x), \text{ т. е.}$$

$$P'(x) = q(x).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если сила давления $q(x)$ на частицы горизонтального слоя пластинки, погруженной вертикально в жидкость, находящегося на глубине x (считая от поверхности жидкости), есть непрерывная функция на сегменте $[0, H]$, то сила давления P на всю пластинку высоты H равна определенному интегралу от функции $q(x)$ на сегменте $[0, H]$:*

$$P = \int_0^H q(x)\, dx. \tag{42}$$

Доказательство. Сила давления на всю пластинку есть приращение первообразной функции $q(x)$ на сегменте $[0, H]$, поэтому она выражается определенным интегралом (42).

---

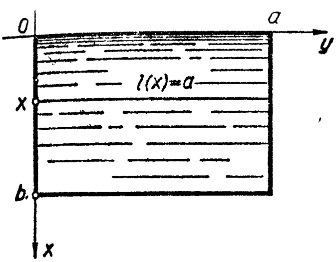
[1] M_q — сила давления на частицы некоторого горизонтального слоя пластины высотой Δx. Если считать силу давления во всех горизонтальных (линейных) слоях этой полоски высотой Δx, равной M_q, то сила давления на всю полоску будет равна $M_q \Delta x$. Аналогичные рассуждения и для $m_q \Delta x$.

Пример 4. Найти силу давления P воды, наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой $a \times b$ (черт. 26).

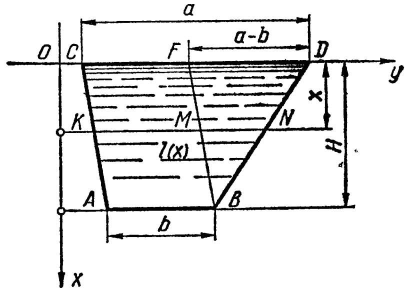
Решение. Здесь $l(x)=a$ и $q(x)=\delta a x$, где δ — удельный вес воды, $q(x)$ — непрерывная функция, поэтому на основании формулы (42) имеем:

$$P=\delta \int_0^b a x d x=a \delta \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^b=\delta \frac{a b^2}{2}.$$

Пример 5. Вычислить силу давления P воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание



Черт. 26



Черт. 27

которой равно a, нижнее $b\,(a>b)$, высота H, предполагая, что поверхность воды достигает верхнего края плотины (черт. 27).

Решение. Чтобы записать функцию $q(x)$, надо найти $l(x)$. Из чертежа (27) имеем: $l(x)=b+MN$.

$\triangle FDB \backsim \triangle MNB$, поэтому $MN=\dfrac{(a-b)(H-x)}{H}$

и $l(x)=a-\dfrac{a-b}{H}x$. Следовательно, функция $q(x)$ имеет вид:

$$q(x)=\delta\left(a-\frac{a-b}{H} x\right) x, \quad x \in[0, H].$$

Функция $q(x)$ непрерывна, поэтому искомую силу давления P вычислим по формуле (42), считая $\delta=98 \cdot 10^2 \frac{H}{м^3}$,

$$P=\delta \int_0^H\left(a-\frac{a-b}{H} x\right) x d x=\frac{\delta H^2}{6}(a+2 b).$$

Если, например, $a = 300$ *м*, $b = 150$ *м*, $H = 20$ *м*, то сила давления

$$P = \frac{98 \cdot 10^2 \cdot 20^2}{6}(300 + 2 \cdot 150) = 392 \cdot 10^6 \ H.$$

Упражнения

79. Вычислить работу, затраченную при сжатии винтовой пружины на 5 *см*, если известно, что при сжатии пружины на 0,4 *см* была затрачена сила 6,4 *н*.

Указание. См. пример 1.

80. Рессора прогибается под нагрузкой $2 \cdot 10^4$ *н* на 1 *см*. Какую работу надо затратить для деформации рессоры на 2 *см*?

Указание. См. пример 1.

81. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из ямы глубиной 4 *м*, имеющей квадратное сечение со стороной, равной 2 *м*. Для воды удельный вес $\delta = 98 \cdot 10^2 \frac{H}{м^3}$.

Указание. См. пример 2.

82. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду, наполняющую полусферический резервуар радиуса $R = 3$ *м*.

Указание. Сила $F(x) = 98 \cdot 10^2 \pi (2Rx - x^2)(R - x)$ H.

83. Решить пример 5 (стр. 55), предполагая, что верхнее основание трапеции a меньше нижнего основания b.

84. Треугольная пластина погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластины a, высота h. Вычислить силу давления воды на эту пластину.

85. Решить задачу 84 в предположении, что на поверхности воды лежит вершина треугольной пластины, а основание параллельно поверхности воды.

86. Вычислить силу давления жидкости удельного веса δ на погруженную в нее вертикально пластину, имеющую форму фигуры, ограниченной линиями $y = (x+1)^2 + 1$, $y = (x+1)^2 + 2(x+1)$, $x = 0$, $x = 2$, считая, что направление оси Oy совпадает со свободной поверхностью жидкости и с верхним краем пластины.

Указание. См. пример 3, § 6.

87. Вычислить силу давления жидкости удельного веса δ на погруженную в нее вертикально пластину, имеющую форму фигуры, ограниченной линиями $y=1+\sin^2 x$, $y=-1-\cos^2 x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, имея в виду, что ось Oy направлена вдоль свободной поверхности жидкости и совпадает с верхним краем пластины.

Указание. См. пример 4, § 6.

§ 10. Разные задачи

88. Какие из функций $F_1(x)=x\cos x$, $F_2(x)=\sin^2 x$, $F_3(x)=7-\cos^2 x$, $F_4=5\cos^2 x$, $F_5(x)=11-\frac{\cos 2x}{2}$ являются первообразными для функции $f(x)=\sin 2x$?

89. Какие из функций $F_1(x)=\sin^2 x$, $F_2(x)=\frac{7+2x+\sin 2x}{4}$, $F_3(x)=\frac{2x-1+\sin 2x}{4}$, $F_4(x)=x\cos^2 x$ являются первообразными для функции $f(x)=\cos^2 x$?

90. Какие из функций $F_1(x)=\cos(2x-1)$, $F_2(x)=|x|-1$, $F_3(x)=x|x|$, $F_4(x)=x\sin 2x+2$, $F_5(x)=|\sin x|$, $F_6(x)=\sin|x|$ являются первообразными некоторых функций на сегменте $[-\pi, \pi]$?

91. Показать, что функция $f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{если } x\leqslant 0,\\ 5, & \text{если } x=0,\\ 2, & \text{если } x>0\end{cases}$

не имеет первообразной на сегменте, содержащем начало координат.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)$ на сегменте $[-a, a]$. Если бы заданная функция имела на сегменте $[-a, a]$ своей первообразной функцию $F(x)$, то в каждой точке сегмента выполнялось бы равенство $F'(x)=f(x)$. Так как $(x^2+C_1)'=2x$, а $(2x+C)'=2$, то при $x<0$ мы должны функцию $F(x)$ считать равной x^2+C_1, а для $x>0$ равной $2x+C_2$. Но первообразная функция есть непрерывная функция, поэтому должно иметь место равенство $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x^2+C_1)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(2x+C_2)$, откуда $C_1=C_2$. Обозначим общее значение C_1 и C_2 через C. Итак,

$$F(x)=\begin{cases} x^2+C, & \text{если } x<0,\\ C, & \text{если } x=0,\\ 2x+C, & \text{если } x>0.\end{cases}$$

Функция $F(x)$ при $x=0$ не имеет производной. Действительно, при $\Delta x<0$ $F(x+\Delta x)-F(0)=(0+\Delta x)^2+$ $+C-C=\Delta x^2$, а при $\Delta x>0$ $F(0+\Delta x)-F(0)=(0+2\Delta x)+$ $+C-C=2\Delta x$.

Поэтому

$$\frac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}=\begin{cases} \Delta x, & \text{при } \Delta x<0,\\ 2, & \text{при } \Delta x>0\end{cases}$$

и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(0+\Delta x)-F(0)}{\Delta x}$ не существует. Отсюда следует, что $F(x)$ не является первообразной для функции $f(x)$. С другой стороны, мы убедились, что первообразная функции $f(x)$, если бы она существовала, совпала бы с $F(x)$ или отличалась от нее аддитивной постоянной. Следовательно, функция $f(x)$ не имеет первообразной.

92. Убедиться, что любая первообразная нечетной непрерывной функции, определенной на сегменте $[-a, a]$, есть функция четная.

Решение. Пусть задана нечетная функция $f(x)$:

$$f(-x)=-f(x), \quad x\in[a, b],$$

и пусть $F(x)$ — любая ее первообразная.

По свойству 3 функция $-F(-x)$ есть первообразная функции $f(-x)$. Но по условию $f(-x)=-f(x)$, поэтому первообразные этих функций могут отличаться только аддитивной постоянной, т. е.

$$-F(-x)=-F(x)+C.$$

Последнее равенство справедливо при любом значении x из сегмента $[-a, a]$. Положив $x=0$, получим:

$$-F(0)=-F(0)+C,$$

откуда $C=0$ при $x=0$. Но C не зависит от x, поэтому всюду на сегменте $[-a, a]$ выполняется равенство $-F(-x)=-F(x)$, или $F(-x)=F(x)$, т. е. любая первообразная $F(x)$ есть четная функция.

93. Убедиться, что четная непрерывная функция, определенная на сегменте $[-a, a]$, имеет на этом сегменте по крайней мере одну нечетную первообразную.

Решение. Пусть функция $y=f(x)$ четная, т. е.

$$f(-x)=f(x), \quad x\in[-a,\ a],$$

и пусть $F(x)$ — некоторая ее первообразная, т. е.

$$F'(x)=f(x), \quad x\in[-a,\ a].$$

Заметим, что функция

$$\psi(x)=F(x)-F(0),\ x\in[-a,\ a]$$

есть также первообразная для функции $f(x)$.

Убедимся, что первообразная $\psi(x)$ является нечетной функцией. Имеем:

$$\psi(-x)=F(-x)-F(0),\ x\in[-a,\ a].$$

Далее по свойству 3 функция $-\psi(-x)$ есть первообразная для функции $f(-x)$, а в силу четности функции $f(x)$ — первообразная и для функции $f(x)$. Поэтому функция $-\psi(-x)$ отличается от функции $\psi(x)$ на некоторую аддитивную постоянную, т. е. при некотором C имеет место равенство $\psi(x)=-\psi(-x)+C$, $x\in[-a,\ a]$. Полагая в этом равенстве $x=0$, получим:

$$\psi(0)=-\psi(0)+C.$$

Но $\psi(0)=F(0)-F(0)\equiv 0$, поэтому и $C\equiv 0$. Таким образом, $\psi(x)=-\psi(-x)$, $x\in[-a,\ a]$.

Утверждение доказано.

Для функций, указанных в задачах 94—96, найти их первообразные, имеющие в заданных точках определенную величину.

94. $y=x^3$, $F(2)=12$.

Указание. Любая первообразная заданной функции имеет вид $\frac{x^4}{4}+C$. Подставив значение $x=2$, получим уравнение для определения C.

95. $y=3x^2-2x+1$, $F(1)=0$.

96. $y=\sin 3x$, $F(0)=4$.

Среди первообразных функций, заданных в задачах 97, 98, найти те, которые являются нечетными функциями.

97. $y=5x^4-3x^2+2$.

Указание. См. задачу 93: $F(x)=x^5-x^3+2x+C$, $F(0)=C$.

98. $y=\cos x+3$.

99. Справедливо ли утверждение: «Для того чтобы любая первообразная непрерывной функции $f(x)$ была четной на сегменте $[-a, a]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была нечетной на этом сегменте»?

100. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кубической параболой $y=x^3$, осью ординат и прямой $y=8$.

101. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=x^3$.

102. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-1-x^2$ и прямой $y=-5$.

103. Фигура, ограниченная дугой параболы $y=x^2$, прямой $y=2-x$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем полученного тела.

104. Трапеция, ограниченная прямыми $y=2x$, $y=2$, $y+3x-14=0$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем полученного тела.

105. Фигура, ограниченная дугой параболы $y=x^2+4$, прямыми $y=5x+10$, $y=-\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем полученного тела.

106. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, которая ограничена цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, осью Ox и прямыми $x=-a$, $x=a$.

107. Фигура, ограниченная дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(y \geqslant 0)$ и осью абсцисс, вращается вокруг оси абсцисс. Вычислить объем полученного таким образом тела.

Указание. Найти y^2 из уравнения эллипса.

108. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x$ и прямой $y=x$.

109. Решить задачу 107, пользуясь формулой Симпсона (31).

110. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=(9t^2+1)\ \frac{м}{сек}$. Найти длину пути, пройденного телом за 10 секунд от начала движения.

111. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=(2t+7)\ \frac{м}{сек}$. Найти длину пути, пройденного телом за третью секунду.

112. Тело движется прямолинейно со скоростью $v=(12t-t^2)\frac{м}{сек}$. Найти длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.

Указание. В момент начала движения и остановки скорость движения равна нулю.

113. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. Одно тело двигалось со скоростью $v=(3t^2+2t)\frac{м}{сек}$, другое — со скоростью $v=2t\frac{м}{сек}$. Через сколько секунд расстояние между ними было равно 216 *м*?

114. Пружина растягивается на 0,02 *м* под действием силы в 60 *н*. Какую надо затратить работу, чтобы растянуть пружину на 0,12 *м*?

115. Силой 180 *н* пружина растягивается на 0,02 *м*. Первоначальная длина пружины 0,2 *м*. Какую надо совершить работу, чтобы растянуть пружину до 0,25 *м*?

116. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из доверху наполненного цилиндрического резервуара, высота которого $H=4$ *м*, а основание — круг радиуса $R=2$ *м*.

117. Вычислить силу давления воды на дно и стенки аквариума, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания равны 0,8 *м* и 0,5 *м*, а высота 0,3 *м*. Аквариум наполнен водой доверху.

118. Цилиндрический стакан наполнен маслом. Вычислить силу давления масла на боковую поверхность стакана, если высота его $H=0{,}08$ *м* и радиус основания $r=0{,}04$ *м*. Плотность масла $\delta=900\frac{кг}{м^3}$.

Ответы

1. $S=2t^2+t+50$. 3. Парабола $y=x^2$. 4. Прямая $y=5x-1$. 5. а) $-x^2+C$; б) x^5+C; в) $10x+C$; г) $3x^2+5x+C$. 7. $-\frac{1}{x}+C$. 8. $\frac{2}{x^4}+C$. 9. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$. 10. $\frac{5}{13}x^2\sqrt[5]{x^3}$. 11. x^3+3x^2+7x+C. 12. $3\sin 2x+C$. 13. $-\frac{7}{5}\cos(5x+2)+C$. 14. $-\frac{1}{11}\sin(\sqrt{2}-11x)+C$. 15. $-\frac{21}{\pi}\cos\frac{\pi x}{8}+C$. 16. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+$

$+\frac{5}{3}\sin(3x-1)+C$. **17.** $\frac{1}{3}x^3-x^2+11x-7\ln|x|+C$.

18. $\frac{1}{101}(x+2)^{101}+C$. **19.** $\frac{1}{2}e^{2x+5}+C$. **20.** $\frac{1}{6}(4x+7)^{\frac{3}{2}}+C$.

21. $2\sin x-7\cos x+C$. **22.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$.

23. $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cos 4x+\cos 2x\right)+C$. **24.** $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin x}{2}+C$.

27. 6. **28.** 27. **29.** 510. **30.** 33. **31.** 1. **32.** $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. **33.** 1.

34. $e-1$. **35.** 2. **36.** 80. **37.** 10. **38.** $7(e^2-1)$. **39.** $\frac{4}{3}$.

40. $-\frac{17}{4}$. **41.** 8. **42.** $31\frac{1}{6}$. **43.** $3\frac{1}{6}$. **44.** 16. **45.** $\frac{3}{4}\sqrt{3}-1$.

46. $\frac{\pi}{2}$. **47.** 3π. **49.** $20\frac{1}{4}$. **50.** 36. **51.** 30. **52.** $\frac{4}{\ln 2}$. **53.** $|k|\leqslant 3$.

54. $\frac{7}{3}$. **55.** $\frac{b^3}{3}$. **56.** $10\frac{2}{3}$. **57.** $\frac{\sqrt{2}}{4}(4-\pi)$. **58.** $\sqrt{3}-1$.

59. 4. **60.** 2. **61.** 4. **62.** $4\ln\frac{3}{2}$. **63.** $\frac{2}{3}$. **64.** $10\frac{2}{3}$. **65.** $10\frac{2}{3}$.

67. πab. **68.** $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$. **69.** $\frac{H}{3}(Q+q+\sqrt{Qq})$. **70.** $\frac{H}{3}\pi R^2$.

71. $\frac{\pi^2}{2}$. **72.** $\frac{3}{10}\pi$. **73.** 2π. **74.** $\frac{8}{3}a^3$. **75.** 10 *м*. **76.** 1,295 *кг*.

77. 210 *к*. **78.** 18. **79.** 2 *дж*. **80.** 400 *дж*. **81.** $3136\cdot 10^2$ *дж*.

82. $198\,450\pi$ *дж*. **83.** $\frac{\delta h^2}{6}(a+2b)$. **84.** $\frac{\delta a h^2}{6}$. **85.** $\frac{\delta a h^2}{3}$. **86.** 6δ.

87. $\frac{3}{8}\pi\delta$. **88.** $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_5(x)$. **89.** $F_2(x)$, $F_3(x)$.

90. $F_1(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$. **94.** $F(x)=\frac{x^4}{4}+8$. **95.** $F(x)=$ $=x^3-x^2+x-1$. **96.** $F(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x+4\frac{1}{3}$. **97.** $F(x)=$ $=x^5-x^3+2x$. **98.** $F(x)=\sin x+3x$. **99.** Да. **100.** 12.

101. $\frac{5}{12}$. **102.** $10\frac{2}{3}$. **103.** $\frac{8}{15}\pi$. **104.** $14\frac{2}{9}\pi$. **105.** $71\frac{1}{15}\pi$.

106. $\frac{\pi a^3}{4}(e^2+4-e^{-2})$. **107.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **108.** $10\frac{2}{3}\pi$. **110.** 3010 *м*.

111. 12 *м*. **112.** 288 *м*. **113.** 6 *сек*. **114.** 21,6 *дж*. **115.** 11,25 *дж*.
116. $32\pi\delta$ *дж*. **117.** 2322,6 *н*. **118.** $\approx 7,1$ *н*.

НАЧАЛА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ С ЭЛЕМЕНТАМИ КОМБИНАТОРИКИ

В. Г. Потапов

§ 1. Первоначальные понятия теории вероятностей

1. Что изучает теория вероятностей? Часто, изучая то или иное явление, мы интересуемся не его содержанием, а лишь тем, произойдет оно или не произойдет.

До сих пор при изучении арифметики, алгебры, геометрии, физики, химии мы знакомились с закономерностями, которые позволяют заранее точно указать результат каждого единичного явления. Например:

1. Если известна длина трех отрезков, то мы можем заранее сказать, можно или нельзя построить треугольник по этим отрезкам.

2. Если известен удельный вес какого-нибудь предмета, то, не бросая его в воду, можно заранее сказать, потонет он или не потонет. Практический опыт всегда будет подтверждать наш вывод.

3. Если известна скорость ракеты, то можно заранее предсказать, преодолеет или не преодолеет ракета силу земного притяжения.

Однако часто нам приходится сталкиваться с явлениями, наступление или ненаступление которых заранее предвидеть нельзя. Такие явления называются *случайными*.

Например, нельзя заранее точно указать: выпадет герб или цифра при подбрасывании монеты, окажется выигрышным или невыигрышным приобретенный билет денежно-вещевой лотереи, попадет или не попадет пуля в цель при одном выстреле, окажется или не окажется номер экзаменационного билета кратным пяти.

Во всех этих примерах рассматриваются единичные опыты, или *испытания*. При осуществлении каждого такого испытания мы получаем его *исходы*.

Примеры

1. Играется шахматная партия — испытание. Выигрыш, проигрыш, ничья — его возможные исходы.

2. Контролер осматривает изготовленную деталь — испытание. Деталь стандартная или нестандартная — возможные исходы этого испытания.

3. У больного проверяют группу крови — испытание. Первая, вторая, третья группы — возможные исходы испытания.

Ясно, что исход каждого из этих испытаний мы не можем предсказать, так как он является случайным. Но важно то, что в практике нам часто и не требуется знать исход каждого испытания в отдельности. Поясним это примерами. В масштабе страны неважно знать, какой размер обуви носит тот или иной человек. Но для планирующих органов очень важно знать, какая доля людей носит обувь, например, 42 размера. Для анализа деятельности предприятия неважно, является конкретная деталь стандартной или нестандартной. Гораздо важнее знать, как часто среди выпускаемых деталей встречаются нестандартные. При посеве семян важно заранее знать, какой процент семян взойдет. Результат же отдельного испытания для одного зернышка не имеет никакой практической ценности.

Все эти примеры имеют две характерные особенности. Во-первых, в них мы имеем дело с так называемыми *массовыми однородными испытаниями*, которые состоят из повторения большого числа подобных между собой единичных испытаний при соблюдении неизменными условий их проведения. Во-вторых, при рассмотрении этих массовых однородных испытаний мы и не пытаемся предсказывать исходы отдельных, единичных испытаний.

Но некоторые случайные события мы можем предсказывать с практической достоверностью.

Мы спокойно садимся в самолет ТУ-114 и совершаем перелет Москва—Владивосток, так как с практической достоверностью считаем, что любой такой перелет будет успешным.

Пусть монета подбрасывается 100 раз подряд. Приступая к подбрасыванию монеты, мы будем практически уверены в том, что при этом хотя бы один раз появится герб. В то же время мы осознаем и то, что при этом может получиться выпадение 100 раз подряд цифры, хотя такой исход испытания и является исключительно редким.

В практических расчетах мы часто используем понятие средней арифметической величины: средний процент выполнения плана, средняя месячная зарплата одного работающего, средний процент успеваемости учащихся по математике.

Свойство устойчивости массовых однородных испытаний состоит в том, что результаты каждого отдельного испытания почти не сказываются на среднем результате всей массовой однородной операции.

Так, для населения любой республики Советского Союза характерно, что средняя продолжительность жизни женщин больше средней продолжительности жизни мужчин.

На каждые 1000 новорожденных в среднем приходится 515 мальчиков и 485 девочек.

Однако по этим данным нельзя судить о продолжительности жизни конкретно взятого мужчины или женщины, о числе мальчиков и девочек в отдельно взятой семье. И даже если взять какую-нибудь одну тысячу зарегистрированных рождений, то практически невозможно ожидать в их числе 515 мальчиков и 485 девочек. Но если проанализировать по полу n тысяч новорожденных, где n достаточно велико, то число родившихся девочек будет близко к $485n$.

Итак, суммарный результат массовой операции поддается почти достоверным предсказаниям. Этим свойством обладают все средние значения, и оно лежит в основе так называемого *закона больших чисел*.

Закон больших чисел служит основой всех практических приложений теории вероятностей, так как позволяет предвидеть суммарный результат массовых однородных испытаний с небольшой погрешностью.

Таким образом, **теория вероятностей изучает закономерности, которые имеют место в массовых однородных испытаниях.**

2. Первоначальные понятия. Вы уже знаете, что некоторые изучаемые понятия, например понятия точки, прямой и плоскости (в геометрии), принимаются за основные, т. е. не определяются.

Пусть монета подбрасывается один раз. Возможными исходами этого испытания являются выпадение герба и выпадение цифры. Если отвлечься от реального содержания исходов испытания и интересоваться лишь тем, произошел или не произошел тот или иной исход, то мы получим понятие элементарного события, которое в теории вероятностей является основным и не определяется.

Так, выигрыш, проигрыш и ничья являются возможными исходами для одной из команд, принимающей участие в футбольном матче. Обозначим соответствующие им элементарные события буквами E_1, E_2, E_3. Тогда при проведении испытания каждое из этих элементарных событий может произойти или не произойти.

При решении задач с конкретным содержанием очень важно уметь составлять модель или *схему испытания*, которая представляет собой совокупность всех элементарных событий рассматриваемого испытания. В этом случае элементарные события будем коротко называть *точками* этой схемы. Так, схема испытания, состоящего в подбрасывании игрального кубика, содержит 6 точек E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, означающих выпадение на верхней грани кубика одного, двух, ..., шести очков. Схема испытания, состоящего в подбрасывании монеты, содержит две точки (элементарные события E_1 и E_2, означающие выпадение герба, выпадение цифры).

Основная трудность при составлении схемы испытания состоит в том, что выбор этой схемы может быть осуществлен неоднозначно. Пусть, например, испытание состоит в том, что контролер проверяет изготовленную деталь. В одном случае схема этого испытания будет содержать две точки E_1 и E_2, означающие соответственно появление стандартной и нестандартной детали. При более тонком анализе схема этого испытания может содержать уже 3 точки E_1, E_2, E_3, означающие соответственно появление детали высшего качества, первого сорта, второго сорта, бракованной.

Различные схемы испытаний играют в теории вероятностей важную роль. Оказывается, что если мы сможем построить ту или иную схему испытания, то это позволит нам решать разнообразные практические задачи, которые можно описать ими.

Пусть схема испытания состоит из двух точек E_1 и E_2. Обратите внимание на то, что совершенно разнородные реальные опыты, такие, как: выстрел по цели, возможными исходами которого являются попадание и промах, испытание образца на прочность, возможными исходами которого являются разрушение и неразрушение образца, набрасывание кольца на колышек и другие, достаточно хорошо могут быть описаны одной этой схемой.

Введем еще одно понятие—*событие*, подразумевая под этим понятием совокупность некоторого числа точек схемы испытания. Пусть дана схема испытания, содержащая 6 точек E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Эта схема может описывать реальный опыт, связанный, например, с подбрасыванием игрального кубика. Тогда совокупность точек E_2, E_4, E_6 описывает событие, состоящее в том, что на верхней грани кубика выпало четное число очков; E_1, E_2, E_3—число очков не более трех; E_5, E_6—число очков не менее пяти.

Совокупность одного или нескольких (не всех) точек схемы испытания будем называть *случайным событием*. Случайные события обозначаются буквами A, B, C, ... Извлечение гласной буквы из набора всех букв русского алфавита, получение оценки „5" на экзамене, выигрыш в шахматной партии являются примерами случайных событий.

Совокупность всех точек схемы испытания будем называть *достоверным событием* и обозначать его буквой U. Так, выпадение герба или цифры при подбрасывании одной монеты, выигрыш, проигрыш или ничья в матче двух футбольных команд, получение оценки „1", „2", „3", „4" или „5" при ответе—достоверные события.

Событие будем называть *невозможным*, если оно не содержит ни одной точки схемы испытания. Невозможное событие будем обозначать буквой Z. При любом исходе испытания это событие не происходит. Так, выпадение более шести очков при одном подбрасывании игрального кубика, выпадение герба и цифры при одном подбрасывании монеты, выигрыш 100 тыс. рублей на один билет денежно-вещевой лотереи—события невозможные.

Упражнения

1. Указать число точек схемы следующих испытаний:

1) производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов;

2) производится одно взвешивание данного предмета;

3) наудачу извлекается одна кость из полной игры домино.

2. Привести примеры реальных испытаний, которые могут быть описаны схемой испытания, содержащей три точки: E_1, E_2, E_3.

3. Указать, сколько точек содержит каждое из следующих случайных событий:

1) наудачу взятое двузначное число кратно трем;

2) наудачу проведенная диагональ в выпуклом семиугольнике проходит через фиксированную вершину семиугольника;

3) сумма двух выбранных наудачу однозначных чисел равна десяти.

4. Какие из следующих событий являются достоверными:

1) выбранное наудачу трехзначное число является четным;

2) извлечение дубля из полной игры домино;

3) появление не более шести очков на верхней грани игрального кубика?

5. Какие из следующих событий являются невозможными:

1) составление из полного набора букв русского алфавита, написанных на карточках, слова *математика*, если каждая карточка может быть использована только один раз;

2) извлечение наудачу из коллекции иностранных марок всех европейских стран английской марки;

3) извлечение из урны цветного шара, если в ней находятся 3 синих и 5 красных шаров;

4) появление более шести очков на верхней грани игрального кубика?

3. Несовместные и равновозможные события. Несколько событий будем называть *несовместными*, если никакие два из них не могут появиться одновременно при одном исходе испытания.

Примерами несовместных событий являются:

1) попадание пули в цель, промах при одном выстреле;

2) выигрыш, проигрыш, ничья в шахматной партии;

3) выпадение четного, выпадение нечетного числа очков на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

В отличие от этих примеров событие A, означающее появление на верхней грани игрального кубика четного числа очков—$\{E_2, E_4, E_6\}$, и событие B, означающее появление числа очков, кратных трем—$\{E_3, E_6\}$, совместны. При выпадении на верхней грани кубика шести очков произойдет как событие A, так и событие B. Заметим, что элементарные события (примеры 1 и 2) являются несовместными.

Исходы испытания считаются *равновозможными*, если из соображений симметрии имеются основания считать, что любой исход испытания не более возможен, чем другие. При решении конкретных задач о равновозможности исходов испытания обычно судят по тому, что выбор производится *наудачу*.

Например, если из полной игры домино наудачу извлекается одна кость, причем все кости симметричны и без пометок, то выбор любой кости равновозможен. Если же симметрия костей нарушена или некоторые из костей оказались помеченными, то исходы испытания становятся неравновозможными. Аналогично обстоит дело и при извлечении наудачу экзаменационного билета. В этом случае равновозможность всех исходов испытания обеспечивается тем, что все билеты пишутся на одинаковых карточках и не разрешается делать на них никаких пометок.

Понятие равновозможности исходов испытания позволяет судить о том, какое из двух данных случайных событий является более возможным. Так, извлечение из полной игры домино дубля менее возможно, чем извлечение не дубля. Это объясняется тем, что извлечение любой кости равновозможно, но из 28 костей домино дублей только 7.

Упражнения

6. Какие из следующих пар событий являются несовместными:

1) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включительно: а) делится на 10, б) делится на 11;

2) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно: а) является четным, б) кратно пяти;

3) наудачу выбранная деталь является: а) стандартной, б) нестандартной;

4) нарушение в работе: а) первого, б) второго мотора летящего самолета?

7. Какие из следующих пар событий являются более возможными:

1) выигрыш по одному билету лотереи, выигрыш по двум билетам той же лотереи;

2) извлечение из 40 экзаменационных билетов билета, номер которого кратен семи, номер которого кратен десяти;

3) выпадение при пяти подбрасываниях монеты хотя бы одного герба, выпадение пяти раз цифры?

4. Формула для непосредственного подсчета вероятностей. Теперь введем еще одно основное понятие — понятие *вероятности*. С этой целью познакомимся с одной из важнейших схем теории вероятностей, которая носит название *классической схемы*. Эта схема имеет место, когда все исходы испытания являются равновозможными и несовместными, а число всех исходов конечно.

В предыдущем пункте на основании практического опыта мы старались дать оценку того, какое из двух данных событий является более возможным. Но, используя только свой опыт, мы не всегда можем сказать, какое из двух рассматриваемых событий более возможно. Так, например, если в комнате случайным образом собралось 12 человек, то какое из двух событий более возможно: событие A, состоящее в том, что хотя бы у двух человек числа дней рождений совпадут, или событие B, состоящее в том, что совпадений чисел дней рождения не будет? В этом случае многие из вас могут сказать, что так как в месяце может быть 31 день, а людей только 12, то событие B более возможно, чем событие A. Но если вы проделаете опыт, записывая числа дней рождения наудачу выбранных двенадцати человек, то почти всегда вы столкнетесь со случаем, когда хотя бы у двух человек числа дней рождения совпадут.

Рекомендуем каждому ученику проделать такой опыт и полученные результаты сравнить. Тогда естественно возникает вопрос, можно ли охарактеризовать возможность наступления случайного события числом. Будем считать, что любым двум равновозможным элементарным событиям рассматриваемого испытания можно приписать одну и ту же вероятность их появления. Тогда если испытание сводится к „классической схеме“, содержащей n точек, то можно сказать, что вероятность появления каждого элементарного события равна $\frac{1}{n}$.

Пусть симметричная монета подбрасывается один раз. Тогда схема испытания содержит две точки $\{E_1, E_2\}$, где E_1 означает выпадение герба, а E_2—выпадение цифры. Значит, выпадение герба можно ожидать с вероятностью, равной $\frac{1}{2}$. Очевидно, с одинаковой вероятностью, равной $\frac{1}{2}$, можно ожидать появление как четного, так и нечетного числа очков при подбрасывании игрального кубика. Это объясняется тем, что схема испытания содержит 6 точек, а каждое из событий, означающих выпадение четного и нечетного числа очков, содержит по 3 точки.

Рассмотрение этих примеров приводит нас к следующему выводу.

Если испытание сводится к «классической схеме», то вероятность появления события A будет равна отношению числа точек m, содержащихся в этом событии, к числу всех точек n рассматриваемой схемы.

Значит,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где $P(A)$ есть вероятность события A и $0 \leqslant m \leqslant n$.

Полученную формулу называют *формулой для непосредственного подсчета вероятностей*.

Из формулы (1) можно получить следующие следствия:

1. Вероятность наступления достоверного события равна единице

По определению достоверное событие U происходит при всех исходах испытания, следовательно, $m = n$ и, значит,

$$P(U) = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Вероятность наступления невозможного события равна нулю.

По определению невозможное событие Z не происходит ни при одном исходе испытания, следовательно, $m=0$ и, значит,

$$P(Z)=\frac{0}{n}=0.$$

3. Вероятность наступления случайного события есть положительное число, меньшее единицы.

По определению случайное событие A происходит не при всех исходах испытания, следовательно, $0 < m < n$. Разделив члены этого неравенства на n, получим: $0<\frac{m}{n}<1$. Следовательно, $0<P(A)<1$.

5. Примеры решения задач. Если при анализе реальной задачи установлено, что все исходы испытания являются равновозможными, то для вычисления вероятности наступления рассматриваемого случайного события можно применять формулу (1). При этом те исходы, при которых случайное событие происходит, будем называть исходами, *благоприятствующими* этому событию. Заметим, что если событию A благоприятствует m исходов из n возможных, то это событие не происходит при $n-m$ исходах испытания. Следовательно, вероятность того, что событие A не произойдет, равна $q=\frac{n-m}{n}$. (Часто вероятность наступления случайного события обозначают буквой p, а вероятность того, что оно не произойдет, — буквой q.)

Пример 1. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу, если в году 365 дней?

Решение Так как листок календаря вырывается наудачу, то все исходы испытания равновозможны. Пусть событие A означает, что вырванный листок соответствует тридцатому числу. Число всех возможных исходов испытания равно $n=365$. Событию A благоприятствует 11 исходов испытания, значит, $m=11$. Следовательно, $P(A)=\frac{11}{365}$.

Пример 2. Из полного набора костей домино наудачу выбирается одна кость. Какова вероятность появления кости, сумма очков на которой равна шести?

Решение. Так как кость выбирается наудачу, то все исходы испытания равновозможны. Пусть событие A означает, что сумма очков на выбранной кости равна шести. В полном наборе домино 28 костей, следовательно, $n=28$. Событию A благоприятствует 4 исхода испытания, а именно появление костей, на которых нанесены очки 0—6, 1—5, 2—4, 3—3. Следовательно, $P(A)=\frac{4}{28}\approx 0{,}143$.

Из полученного ответа можно сделать вывод, что появление события A можно ожидать примерно в 14,3% всех проводимых испытаний. Поэтому в одном испытании событие A скорее не произойдет, чем произойдет.

Упражнения

8. Все буквы русского алфавита написаны на 33 одинаковых карточках. Какова вероятность того, что написанная на карточке буква окажется гласной, если карточка извлекается наудачу?

9. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 включительно является делителем числа 30?

10. В словаре языка А. С. Пушкина имеется 22 000 различных слов, из которых 16 000 А. С. Пушкин в своих произведениях употреблял только по одному разу. Какова вероятность того, что наудачу взятое из этого словаря слово использовалось поэтом в своих произведениях более одного раза?

11. Из 25 экзаменационных билетов, занумерованных целыми числами от 1 до 25, наудачу вынимается один. Какова вероятность того, что номер вынутого билета есть число, кратное трем?

12. На пятнадцати одинаковых карточках написаны целые числа от 1 до 15 в двоичной системе счисления. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содержит: 1) не менее двух единиц; 2) не более двух нулей; 3) ровно 3 единицы?

13. Двое должны разделить между собой 5 одинаковых орехов. Один из них прячет орехи в две коробки любым возможным способом, а второй выбирает любую из них. Какова вероятность того, что отгадывающему достанется 3 ореха? Что вероятнее ожидать, произойдет это событие или не произойдет?

14. Найти вероятность того, что наудачу выбранный член последовательности, заданной формулой общего члена $U_n = n^2 + 1$ (для $n = 1, 2, \ldots, 10$), есть число, кратное пяти?

15. Ученик фиксирует в уме три из четырех точек, не лежащих в одной плоскости. Другой ученик проводит плоскость через какие-нибудь три данные точки. Какова вероятность того, что эта плоскость будет проведена через фиксированные точки?

§ 2. Применение формул числа перестановок и сочетаний к вычислению вероятностей

1. Правило выборки. При решении задач на непосредственный подсчет вероятностей часто приходится рассматривать различные комбинации из элементов некоторого множества. Пусть дано множество $M = \{a, b, c, \ldots, d\}$, состоящее из n элементов. Из данного множества можно составлять различные *выборки*, каждая из которых содержит r элементов, где $0 < r \leqslant n$.

Так, из множества всех цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ можно составлять различные выборки, состоящие, например: а) только из четных цифр; б) только из нечетных цифр; в) из цифр, кратных трем; г) из двух цифр и т. д., причем эти выборки могут отличаться друг от друга хотя бы одним элементом или порядком расположения элементов.

В качестве примера рассмотрим множество, состоящее из трех цифр $\{1, 2, 3\}$. Посмотрим, сколько двузначных чисел можно составить из этих цифр, так чтобы ни одна из цифр в полученных числах не повторялась. Нетрудно заметить, что можно составить 6 таких чисел: 12, 13, 23, 21, 31, 32. Если были бы даны четыре цифры: 1, 2, 3, 4, то из них можно было бы составить 12 различных двузначных чисел так, чтобы в каждом из этих чисел цифры не повторялись. Предлагаем учащимся записать эти числа самостоятельно.

Для того чтобы не пропустить ни одного числа, выпишите вначале по одной из данных цифр, а затем на втором месте запишите каждую из трех оставшихся цифр. Таким же способом можно записать все двузначные числа без повторяющихся цифр, например из пяти или шести цифр.

Рассмотрение этих примеров приводит нас к следующему правилу.

Правило произведения. *Если объект A может быть выбран m способами и после каждого из этих выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор A и B может быть осуществлен mn способами.*

Это правило может быть распространено на случай выбора трех и более объектов.

Вернемся к приведенным выше примерам. Так, если даны 4 цифры: 1, 2, 3, 4, то мы можем четырьмя различными способами выбрать цифру, занимающую место десяток. После каждого такого выбора на месте единиц можно поставить любую из оставшихся трех цифр. По правилу произведения существует $4 \cdot 3 = 12$ способов выбора двух цифр из четырех данных. Следовательно, из четырех данных цифр можно составить 12 двузначных чисел, в которых цифры не повторяются.

Заметим, что во всех рассмотренных примерах выбранный элемент из множества M назад в это множество не возвращался. Такой выбор будем называть *выбором без возвращения.*

В этом случае из множества M можно составлять выборки, содержащие r различных элементов, причем $r \leqslant n$.

Упражнения

16. В магазине имеется 6 сортов конфет и 4 сорта печенья. Сколько различных покупок, содержащих один сорт конфет и один сорт печенья, можно сделать в этом магазине?

17. Сколько имеется путей, которыми можно попасть из города A в город C через город B, если из A в B ведут две дороги, а из B в C — три дороги?

18. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых блюда, 4 вторых и 2 третьих?

19. На книжной полке стоят 25 книг по математике, 15 — по физике, 10 — по астрономии. Сколькими способами можно выбрать 3 книги так, чтобы одна книга была по математике, вторая — по физике и третья — по астрономии?

20. Сколько можно составить различных телефонных номеров, у которых на первом месте стоит цифра 3, а на втором, третьем, четвертом и пятом местах — любая из цифр: 0, 1, 2, ..., 9?

21. Сколько трехзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр: 1, 3, 5, 7, 9, если любая из этих цифр может использоваться только один раз?

2. Перестановки без повторяющихся элементов. Ясно что две выборки объема r будут различны, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Так двузначные числа 23 и 25, отличающиеся друг от друга одной цифрой, различны.

Но две r-выборки с различным порядком расположения элементов в одних случаях считаются различными в других — одинаковыми. Очевидно, что состав президиума из трех человек будет один и тот же независимо от того в каком порядке три определенных человека будут в него избраны. Но если в слове *ТОР* буквы *Т* и *Р* поменять местами, то мы получим новое слово *РОТ*.

Определение. *r-перестановкой из n элементов называют упорядоченную выборку r элементов из данных n. Две r-перестановки считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или порядком расположения элементов.*

Прежде чем приступить к выводу формулы числа r-перестановок, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Сколько можно составить трехзначных чисел из нечетных цифр, если каждую из этих цифр использовать только один раз?

Решение. Множество $M=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ состоит из пяти элементов. По условию задачи выбор производится без возвращения. На первое место выборки цифру можно поставить пятью способами. После каждого такого выбора во множестве остается 4 элемента, и поэтому на втором месте выборки цифру можно поставить четырьмя способами. По правилу произведения существует 20 способов, которыми можно поставить цифры на первом и втором месте выборки. После каждой из этих 20 выборок цифру на третьем месте можно поставить тремя способами. Повторно применяя правило произведения, получим, что искомое число трехзначных чисел равно $20\cdot 3=60$.

Заметим, что полученные трехзначные числа отличаются друг от друга хотя бы одной цифрой или порядком расположения цифр.

Вообще, пусть имеется множество, состоящее из n различных элементов. Требуется найти число перестановок из n данных элементов по r в каждой. Рассуждениями, аналогичными тем, с помощью которых был решен пример 1, получим, что число перестановок из n элементов по r определяется формулой:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1), \qquad (2)$$

где P_n^r означает число перестановок из n элементов по r в каждой.

Таким образом, *число всевозможных r-перестановок из n элементов равно произведению r последовательно убывающих на единицу целых чисел, из которых большее есть n.*

Домножим числитель и знаменатель правой части формулы (2) на $(n-r)!$ Заметим, что $n!$ (читается n-факториал) есть произведение натуральных чисел от 1 до n, равное $1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Тогда формула (2) будет иметь следующий вид:

$$P_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-r)} =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad (3)$$

При $r=n$ формула (2) примет вид:

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!, \qquad (4)$$

где P_n означает P_n^n, т. е. число перестановок из n элементов по n в каждой. Для того чтобы формула (3) имела смысл при $r=n$, будем считать по определению, что $0!=1$.

Пример 2. Сколько различных слов, каждое из которых состоит из семи букв, можно составить из букв слова *событие*?

Решение. Число различных слов, составленных из букв слова *событие*, можно вычислить по формуле (4):

$$P_7 = 7! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 5040.$$

Замечание. В этой и в других аналогичных задачах под «словом» будем понимать любую последовательность букв, независимо от того, имеет она или не имеет смысловое значение.

Упражнения

22. Сколько слов можно составить из 33 букв русского алфавита, каждое из которых состоит из трех различных букв?

23. Сколько трехзначных чисел можно составить из всех цифр так, чтобы цифры в числах не повторялись?

24. Сколькими способами 4 человека могут разместиться в четырехместной каюте?

25. Собрание, на котором присутствует 20 человек избирает в президиум двух человек, один из которых должен быть председателем, а другой секретарем. Каким числом способов это можно сделать?

26. Каким числом способов 10 человек могут находиться в очереди?

27. Сколько различных слов, каждое из которых содержит 4 буквы, можно составить из букв слова *выборка*?

3. Перестановки с заданным числом повторений. Рассмотрим вначале в качестве примера следующую задачу.

Пример 3. Сколько различных слов, каждое из которых состоит из семи букв, можно составить из букв слова *коробок*?

Решение. В отличие от примера 2 здесь не все буквы данного слова различны. Если бы все буквы были различны, то из них можно было бы составить 7! различных слов.

Однако не все перестановки букв дают новые слова. Очевидно, что перестановка букв K, так же как и букв O, между собой не дает нового слова. Следовательно рассматриваемая задача свелась к тому, чтобы определить число перестановок, в результате которых получается одно и то же слово. Число перестановок буквы K между собой равно 2! . После каждой такой перестановки буква O может быть переставлена 3! способами. Применяя правило произведения, получим, что каждое ново слово будет повторяться $2!\cdot 3!$ раз, и поэтому число различных слов, которые можно составить из слова *коробок* равно $\frac{7!}{2!3!}$.

Вообще, пусть дано множество $M=\{a, b, c, \ldots$ состоящее из n элементов, из которых элемент a повторяется n_1 раз, элемент b—n_2 раз, элемент c—n_3 раз, .. так, что $n_1+n_2+n_3+\ldots=n$. Требуется найти число перестановок с заданным числом повторений входящих в него элементов. Повторяя рассуждения, применяемые при решении примера 3, найдем, что число перестановок, в которых элементы a, b, c, ..., повторяются соответственно n_1, n_2, n_3, ... раз, определяется по формуле:

$$P_{n_1, n_2, n_3, \ldots} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots}, \qquad (5)$$

где $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots = n$.

Заметим, что если $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = 1$, то из формулы (5) следует формула (4).

Упражнения

28. Сколько букв алфавита можно составить комбинациями из пяти сигналов, из которых 3 есть импульсы тока, а 2 — паузы?

29. Сколькими способами можно расставить на книжной полке 4 книги по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?

30. Найдите число различных перестановок букв в слове *статистика*.

4. Перестановки с неограниченным числом повторений. Теперь мы рассмотрим примеры, в которых выбор элементов из данного множества производится *с возвращением*. В этом случае выбранный из множества элемент каждый раз возвращается назад в это же множество либо автоматически замещается элементом, аналогичным выбранному.

Пример 4. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, если цифры в числе могут повторяться?

Решение. На место десяток можно выбрать любую из данных цифр. Но так как цифры в числах могут повторяться, значит, выбор цифр осуществляется с возвращением. Поэтому после каждого такого выбора на месте единиц можно поставить любую из трех данных цифр. По правилу произведения выборки получим $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ различных двузначных чисел: 11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55.

Пользуясь этим приемом, подсчитайте самостоятельно, сколько различных трехзначных (четырехзначных) чисел можно составить из цифр 1, 3, 5.

Пример 5. После каждого подбрасывания монеты на листе бумаги записывается буква *Г* (герб) или *Ц* (цифра). Сколько может получиться различных комбинаций букв *Г* и *Ц* при пятикратном подбрасывании монеты?

Решение. Множество *М* состоит из двух элементов, а именно: «герб», «цифра». По условию задачи выборка производится с возвращением, так как выбранный элемент автоматически заменяется ему аналогичным. На первом месте выборки может оказаться буква *Г* или *Ц*. После каждого такого выбора на втором месте могут опять находиться буквы *Г* или *Ц* и т. д. Повторным применением правила произведения находим, что число различных комбинаций букв *Г* и *Ц* при пятикратном подбрасывании монеты равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$.

На основании рассмотренных примеров мы можем сделать следующий вывод. *Число перестановок с повторениями из n элементов по r в каждой вычисляется по формуле*

$$\tilde{P}_n^r = n^r, \tag{6}$$

где $\tilde{P}_n^r$ означает число перестановок с повторениями из n элементов по r в каждой. Так как выбор производится с возвращением, то число элементов выборки r может быть как угодно большим и, в частности, может быть больше n.

Упражнения

31. Электрическая цепь имеет 6 переключателей. Каждый переключатель может быть включен или выключен. Сколько существует различных положений, в которых могут оказаться все переключатели?

32. Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных цифр, если каждая из этих цифр может повторяться?

33. Сколько различных комбинаций появления герба и цифры может быть при n-кратном бросании монеты?

34. Сколько шестизначных чисел можно составить из четных цифр, если каждая из этих цифр может повторяться?

35. Найти число таких перестановок семи учеников, чтобы 3 определенных ученика находились рядом.

5. Сочетания. Рассмотрим теперь такие выборки, в которых не будем обращать внимание на порядок расположения элементов. Для нас важным будет лишь то, какие элементы в эти выборки входят.

Определение. *Сочетанием из n элементов по r в каждом называется выборка, образованная любыми r элементами из данных n. Два сочетания считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.*

Пример. Сколькими различными способами можно избрать из 10 человек комиссию в составе трех человек?

Решение. Если бы учитывался порядок, в котором избираются члены комиссии, то мы получили бы $P_{10}^3 = 720$ комиссий. Но состав комиссии не изменяется, если какие-то 3 определенных человека избираются в нее в различном порядке. Очевидно, в числе 720 комиссий каждая комиссия будет повторяться столько раз, сколько можно составить перестановок из трех человек, т. е. $P_3 = 3!$. Следовательно, число различных комиссий будет равно $\frac{P_{10}^3}{P_3} = 120$.

Вообще, пусть дано множество, состоящее из n различных элементов. Требуется вычислить, сколько из них можно составить сочетаний по r элементов в каждом. Число сочетаний из n элементов по r обозначают через C_n^r или $\binom{n}{r}$.

В рассматриваемом выше примере вы, очевидно, обратили внимание на то, что число сочетаний из n элементов по r меньше, чем число перестановок из n элементов по r в каждой. Это понятно. Если каждое сочетание из n элементов по r упорядочить $r!$ способами, то получим число перестановок из n элементов по r, следовательно,

$$r!C_n^r = P_n^r.$$

Отсюда

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot(n-r+1)}{r!}. \qquad (7)$$

Домножив числитель и знаменатель правой части формулы (7) на $(n-r)!$, получим формулу

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad (8)$$

Рекомендуем самостоятельно рассмотреть следующие упражнения.

1. Используя формулы (5) и (8), покажите, что

$$C_n^r = P_{r,\, n-r}. \tag{8'}$$

2. С помощью формулы (8) доказать справедливость комбинаторного тождества

$$C_n^r = C_n^{n-r}. \tag{9}$$

3. Вычислите C_{1000}^{998} наиболее простым способом. Для того чтобы формулы (8) и (9) имели смысл при $r=0$ и $r=n$, будем считать по определению $C_n^0 = 1$.

Упражнения

36. Сколько прямых можно провести через 5 данных точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой?

37. Сколько хорд можно провести через 4 точки, лежащие на одной окружности?

38. Найти возможное число появления герба m раз при n подбрасываниях монеты ($m < n$).

39. Сколькими способами можно распределить 10 разных марок между тремя учениками, если порядок получения ими марок не учитывать?

40. На отрезке AB дано 5 точек: C, D, E, F, K. Сколько различных отрезков, включая отрезок AB, получилось при этом?

6. Примеры непосредственного вычисления вероятностей. Выбор r элементов из множества, содержащего n элементов, можно рассматривать как испытание, возможными исходами которого являются выборки объема r. Число всех возможных исходов испытания и исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, легко подсчитать, используя формулы числа перестановок и сочетаний. Если из условия задачи можно усмотреть равновозможность всех исходов испытания, то вероятность рассматриваемого события может быть вычислена по формуле (1), а именно $P(A) = \frac{m}{n}$.

Пример 1. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна десяти?

Решение. Порядок извлечения карточек не играет роли. Следовательно, число всех возможных исходов испытания равно $n=C_{15}^2$. Все исходы испытания равновозможны. Из всех исходов испытания событию A (сумма чисел на двух карточках равна десяти) соответствуют 4 исхода, а именно: $1+9$; $2+8$; $3+7$; $4+6$. Следовательно, вероятность события A равна

$$P(A)=\frac{4}{C_{15}^2}\approx 0{,}04.$$

Пример 2. На книжной полке случайным образом расставлены 4 книги по алгебре и 3 — по геометрии. Какова вероятность того, что все книги по одному предмету окажутся рядом?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что все книги по одному предмету окажутся рядом. Число всех возможных исходов испытания вычисляется по формуле числа перестановок из семи элементов и равно $n=7!$; 4 книги по алгебре, расположенные рядом, могут быть переставлены 4! способами и после каждой такой перестановки 3 книги по геометрии могут быть переставлены 3! способами. По правилу произведения выборки число таких способов равно $4!3!$. Кроме этого, сами комплекты книг могут быть переставлены двумя способами. Таким образом, число исходов, благоприятствующих событию A, равно $m=2\cdot 4!3!$ и вероятность наступления события A равна

$$P(A)=\frac{2\cdot 4!\cdot 3!}{7!}\approx 0{,}057.$$

Пример 3. Группа туристов из пятнадцати юношей и пяти девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся двое юношей и две девушки?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в числе избранных окажутся двое юношей и две девушки. 4 человека из 20 можно выбрать числом способов, равным C_{20}^4, так как порядок в выборке не играет роли. Двое юношей из 15 могут быть избраны C_{15}^2 способами и после каждого такого выбора две девушки из 5 могут быть избраны C_5^2 способами. По правилу произведения выборки событию A благоприятствует $C_{15}^2\cdot C_5^2$ исходов испытания, и искомая вероятность равна

$$P(A)=\frac{C_{15}^2\cdot C_5^2}{C_{20}^4}\approx 0{,}2167.$$

Упражнения

41. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы *а*, *а*, *а*, *н*, *н*, *с*, получится слово *ананас*?

42. Наудачу выбираются 3 отрезка из пяти данных отрезков, равных 2 *см*, 3 *см*, 4 *см*, 6 *см*, 8 *см*. Какова вероятность того, что из трех выбранных отрезков можно построить треугольник?

43. Имеется 6 билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов 2 окажутся на места первого ряда?

44. Найти вероятность выпадения герба m раз при n-кратном подбрасывании монеты.

45. Для выполнения упражнения по перетягиванию каната на уроке физкультуры 12 мальчиков должны разделиться по жребию на две группы по 6 человек в каждой. Какова вероятность того, что двое наиболее сильных учеников окажутся в одной группе?

46. Слово *теория* составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекаются 3 карточки и складываются в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово *тор*?

47. Какова вероятность того, что наудачу выбранное шестизначное число составлено только из четных цифр?

48. На один ряд, состоящий из семи мест, случайным образом рассаживаются 7 учеников. Найти вероятность того, что 3 определенных ученика окажутся рядом.

49. В вещевой лотерее разыгрывается 5 предметов. Всего в урне 30 билетов. Первый подошедший к урне вынимает 4 билета. Какова вероятность того, что 2 из этих билетов окажутся выигрышными?

§ 3. Теоремы о вероятности суммы и произведения событий

1. Операции над событиями. Рассмотрим операции над событиями, которые позволяют из данных событий получать другие, новые события. При этом мы будем предполагать, что каждое из данных событий является совокупностью некоторого числа элементарных событий рассматриваемого испытания, и будем требовать, чтобы вновь образованное событие представляло собой совокупность элементарных событий того же испытания.

Пусть даны события A и B. Дадим определение новому событию $A+B$, называемому суммой событий A и B.

Определение. *Событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B, называется их суммой и обозначается $A+B$.*

Пример 1. Если событие A—выигрыш по билету одной лотереи, событие B—выигрыш по билету другой лотереи, то событие $A+B$ означает выигрыш хотя бы по одному билету, т. е. по билету первой лотереи, или второй, или по первой и второй.

Пример 2. Пусть имеется 25 экзаменационных билетов, занумерованных целыми числами от 1 до 25. Если событие A—номер билета кратен пяти, а событие B—номер билета кратен семи, то событие $A+B$ означает, что номер билета кратен пяти или семи. В этом примере события A и B являются несовместными, так как их совместное наступление при одном испытании невозможно.

Теперь дадим определение событию AB, называемому произведением событий A и B.

Определение. *Событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B, называется их произведением и обозначается AB.*

Легко видеть, что события A и B будут несовместными, когда $AB=Z$, где Z—невозможное событие.

Пример 3. Если событие A—выигрыш по билету одной лотереи, событие B—выигрыш по билету другой лотереи, то событие AB означает выигрыш по билетам обеих лотерей.

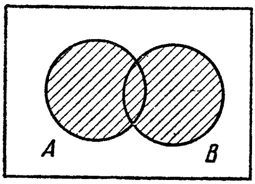
Пример 4. Пусть имеется 25 экзаменационных билетов, занумерованных целыми числами от 1 до 25. Если событие A—номер билета кратен двум, событие B—номер билета кратен трем, то событие AB означает, что номер билета кратен шести.

Пусть дано событие A.

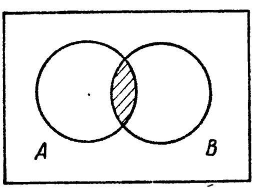
Определение. *Событие, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A, называется событием, противоположным событию A, и обозначается $\bar{A}$ (читается: «не A»).*

Пример 5. Пусть событие A — выпадение герба при подбрасывании монеты, тогда событие $\overline{A}$ — выпадение цифры при подбрасывании монеты.

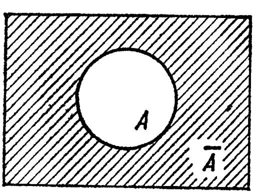
Пример 6. Пусть событие A — обе пули при двух выстрелах не попадают в цель, тогда событие $\overline{A}$ — хотя бы одна пуля при двух выстрелах попадает в цель.



Черт. 1а



Черт. 1б



Черт. 1в

Обратите внимание на то, что для противоположных событий имеют место два соотношения: $A+\overline{A}=U$, $A\cdot\overline{A}=Z$. Если одно из этих соотношений не выполняется, то рассматриваемые события не являются противоположными. Например, событие A — наудачу выбранное двузначное число составлено из нечетных цифр и событие B — двузначное число составлено из четных цифр не являются противоположными. Ответьте, почему.

Хорошую иллюстрацию операций над событиями можно получить с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Пусть прямоугольник диаграммы обозначает множество всех элементарных событий рассматриваемого испытания, а круги внутри прямоугольника — случайные события. Тогда сумму событий $A+B$, произведение событий AB, а также противоположное событие $\overline{A}$ можно представить в виде заштрихованных областей диаграмм Эйлера-Венна, изображенных соответственно на чертежах 1а, 1б, 1в.

Упражнения

50. Если событие A_1 — выигрыш по билету одной лотереи, A_2 — выигрыш по билету другой лотереи, то что означают события:

$$B=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2,\qquad C=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2+A_1A_2?$$

51. Пусть события A_1, A_2, A_3 означают соответственно попадание в цель при первом, втором и третьем выстрелах, а события $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ означают соответствующие промахи. Опишите события:

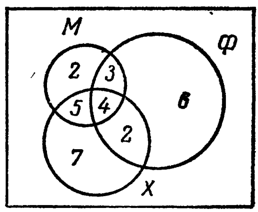
$$E_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

$$E_2 = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3.$$

52. Событие A состоит в том, что наудачу извлеченная деталь является стандартной, событие B — наудачу извлеченная деталь нестандартная. Опишите события $A+B$, AB.

53. С помощью диаграмм Эйлера-Венна дайте геометрическую иллюстрацию событиям: $E_1 = \overline{A}\,\overline{B}$, $E_2 = A\overline{B} + B$, $E_3 = \overline{A} + \overline{B}$.

54. Из некоторой группы учащихся 20 человек увлекаются спортом, 9 — музыкой, 6 — музыкой и спортом. Постройте диаграмму Эйлера-Венна, определите число учащихся группы и число учащихся, увлекающихся только спортом, только музыкой.



Черт. 2

55. Из 35 учащихся одного класса по итогам учебного года оценки «5» по математике имели 14 учащихся, по физике — 15, по химии — 18, по математике и физике — 7, по математике и химии — 9, по физике и химии — 6, по всем трем предметам — 4. По данной диаграмме Эйлера-Венна (черт. 2) определите: 1) сколько учащихся не имеют оценок «5» по этим предметам; 2) имеют оценку «5» только по математике; 3) имеют оценку «5» не менее чем по двум этим предметам.

2. Теорема о вероятности суммы несовместных событий. Прежде чем доказать эту теорему, поясним ее на следующем примере.

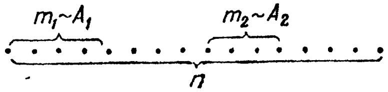
Пример. Экзаменационные работы абитуриентов зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

Решение. Пусть событие A — номер работы кратен 10, событие B — номер работы кратен 11, тогда событие $A+B$ состоит в том, что номер работы кратен 10 или 11.

Легко видеть, что $P(A)=\frac{9}{90}$ (1) и $P(B)=\frac{8}{90}$ (2), а так как события A и B являются несовместными ($AB=Z$), то число исходов, благоприятствующих событию $A+B$, равно 17 и, следовательно, $P(A+B)=\frac{17}{90}$ (3). Сравнивая (3) с (1) и (2), видим, что вероятность события $A+B$ и сумма вероятностей события A и B равны между собой.

Теорема. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

Доказательство. Пусть n — число всех элементарных событий (точек) рассматриваемого испытания. Пусть m_1 и m_2 — число точек, содержащихся соответственно в событиях A_1 и A_2. Так как события A_1 и A_2 несовместны, т. е. не могут появиться при одном исходе испытания, то событие $A=A_1+A_2$ содержит $m=m_1+m_2$ точек (черт. 3).



Черт. 3

Вероятности событий A_1 и A_2 соответственно равны $P(A_1)=\frac{m_1}{n}$ и $P(A_2)=\frac{m_2}{n}$, а вероятность события A равна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}.$$

Отсюда

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2) \text{ при } A_1A_2=Z. \quad (10)$$

Итак, теорема доказана. Заметим, что доказанная теорема с помощью метода математической индукции может быть распространена на случай нахождения вероятности суммы n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, т. е.

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \quad (11)$$

Вводя знак суммы $\sum$, последнее равенство можно записать короче

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Следствие 1. *Если в результате испытания обязательно происходит одно из возможных попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то сумма вероятностей этих событий равна единице.*

Действительно, по теореме о вероятности суммы попарно несовместных событий имеем:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Но так как одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обязательно произойдет, то событие $A_1+A_2+\ldots+A_n$ является достоверным и его вероятность равна единице.

Отсюда

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Или

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1. \tag{12}$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\overline{A}$ равна единице.*

Действительно, так как события A и $\overline{A}$ несовместны, то $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$. Но событие $A+\overline{A}$ является достоверным и поэтому $P(A+\overline{A})=1$.

Следовательно,

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \tag{13}$$

Упражнения

56. Вероятность того, что початки кукурузы сорта Буковинский-3 имеют 12 рядов, равна 0,49, 14 рядов — 0,27 и 16—18 рядов — 0,24. Какова вероятность того, что наудачу выбранный початок будет иметь 12 или 14 рядов?

57. Какова вероятность того, что последняя цифра случайно набранного телефонного номера равна пяти или кратна трем?

58. Какова вероятность того, что наудачу взятая кость из полной игры домино содержит число очков не менее четырех и не более шести?

59. Группа, состоящая из 5 юношей и 7 девушек, распределяет по жребию 4 билета в театр. Какова вероятность того, что в числе получивших билеты окажется больше девушек, чем юношей?

60. В результате испытания обязательно происходит одно из возможных событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Если вероятности событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны 0,2; 0,15; 0,27, а события A_4 и A_5 являются равновоз-

можными, то чему равна вероятность наступления каждого из событий A_4 и A_5?

3. Условная вероятность. Выяснение смысла понятия *условная вероятность* проведем на конкретном примере.

Пусть в группе, состоящей из 20 юношей и 15 девушек, 10 человек занимаются стрелковым спортом. Среди этих стрелков 4 девушки. Наудачу выбирается один ученик.

Пусть событие A состоит в том, что выбранный ученик занимается стрелковым спортом, а событие B — выбрана девушка. Из условия следует вывод, что $P(A)=\frac{10}{35}$ и $P(B)=\frac{15}{35}$. Вероятность же события AB, означающего что выбрана девушка, занимающаяся стрелковым спортом равна $P(AB)=\frac{4}{35}$.

Пусть теперь стало известно, что событие A произошло, т. е. стало известно, что выбранный ученик занимается стрелковым спортом. Как изменится после этого вероятность события B? В новых условиях число всех возможных исходов испытания равно 10, а событию B благоприятствует 4 исхода испытания. Следовательно $P_A(B)=\frac{4}{10}$ (читается: «вероятность события B при условии, что событие A произошло»).

Разделив числитель и знаменатель правой части венства $P_A(B)=\frac{4}{10}$ на 35 и учитывая, что $P(AB)$ и $P(A)=\frac{10}{35}$, окончательно получим формулу

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (14)$$

Проведя аналогичные рассуждения в общем виде можно доказать, что *условная вероятность $P_A(B)$ равна отношению вероятности совместного наступления событий A и B к вероятности наступления события A.*

Пример. Из полной игры домино дважды наудачу вынимают по одной кости, не возвращая их в игру. Найти вероятность появления дубля при втором испытании, если первый раз был извлечен не дубль.

Решение. Пусть событие A — наудачу вынутая кость является не дублем, событие B — вынутая кость есть дубль.

После первого испытания в игре осталось 27 костей и среди них 7 дублей. Поэтому искомая условная вероятность равна

$$P_A(B)=\frac{7}{27}.$$

В рассматриваемом примере события A и B являются *зависимыми*, так как вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого события.

4. Теоремы о вероятности произведения двух событий. Пусть даны события A и B. Теперь мы можем ответить на вопрос, чему равна вероятность совместного появления событий A и B.

Теорема о вероятности произведения двух событий непосредственно следует из формулы

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Отсюда

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B). \tag{15}$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема 1. *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.*

Аналогично можно доказать, что

$$P(AB)=P(B)\cdot P_B(A). \tag{15'}$$

Пример 1. Из полной игры домино дважды наудачу вынимают по одной кости, не возвращая их в игру. Найти вероятность того, что при первом извлечении появится не дубль, а при втором — дубль.

Решение. В предыдущем примере мы вычислили условную вероятность $P_A(B)$, которая равна $\frac{7}{27}$. Вероятность события A равна $P(A)=\frac{21}{28}$, так как перед первым испытанием в полной игре домино 28 костей; из которых не дублей 21. Следовательно, вероятность того, что наступят оба события A и B, равна

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{21}{28}\cdot\frac{7}{27}\approx 0{,}2.$$

Если $P_A(B)=P(B)$, то наступление события A не изменяет вероятности события B. В этом случае говорят, что событие B *независимо* от события A.

Из (15) и (15') следует, что $P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B)$. Если событие B независимо от события A, то, подставив в последнее равенство вместо $P_A(B)$ равное ему $P(B)$, получим:

$$P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P(B).$$

Отсюда $P_B(A)=P(A)$ и, значит, событие A также *независимо* от события B. Следовательно, в этом случае события A и B являются *взаимно независимыми*.

Если события A и B являются независимыми, то, подставляя в формулу (15) вместо $P_A(B)$ равное ему $P(B)$, получим:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B). \tag{16}$$

Таким образом, нами получена

Теорема 2. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Заметим, что если из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ любое событие $A_i (i=1, 2, \ldots, n)$ не зависит от произведения любого числа остальных событий, то последнюю теорему можно распространить на n событий, т. е.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n). \tag{17}$$

Или, вводя знак $\prod$, последнее равенство можно записать короче

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

При решении задач практического содержания независимыми следует считать такие события, для которых вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Пример 2. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в одну и ту же цель и делают по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель первого стрелка — 0,6, второго — 0,7. Какова вероятность того, что оба стрелка попадут в цель?

Решение. Пусть события A_1 и A_2 означают попадание в цель соответственно первого и второго стрелка. По условию события A_1 и A_2 независимые, поэтому

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42.$$

Упражнения

61. Вероятность поражения цели стрелком при каждом выстреле равна 0,7. Производится 4 независимых выстрела. Какова вероятность того, что первые два выстрела будут промахи, а последующие 2 — попадания?

62. Известно, что при каждом измерении равновозможна как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при пяти независимых измерениях все ошибки будут положительными?

63. В одном ящике имеется 12 однотипных деталей, из которых 4 — нестандартные. В другом — 15 деталей и 3 из них нестандартные. Из каждого ящика наудачу извлекается по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся нестандартными.

64. На одинаковых карточках написаны натуральные числа от 1 до 25 включительно. Наудачу дважды извлекают по одной карточке без возвращения. Какова вероятность того, что на обеих карточках будут написаны простые числа?

65. В урне находится 100 лотерейных билетов, из которых 25 — выигрышные. Из урны трижды без возвращения извлекают по одному билету. Какова вероятность того, что все три билета окажутся выигрышными?

5. Теорема о вероятности суммы двух совместных событий. Во втором пункте параграфа нами была доказана теорема о вероятности суммы двух несовместных событий. Естественно поставить вопрос: «Как вычислить вероятность наступления хотя бы одного из событий A или B, если эти события являются совместными?» Прежде чем ответить на этот вопрос, рассмотрим следующую задачу.

Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же мишени. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,8, а второго — 0,7. Какова вероятность того, что мишень будет поражена первым или вторым стрелком?

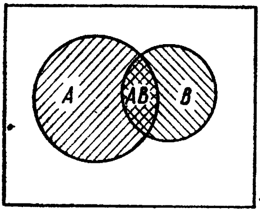
Событие A — попадание в цель первого стрелка и событие B — попадание в цель второго стрелка являются совместными, так как при одном испытании цель может быть поражена обоими стрелками. Следовательно, событие $A+B$ означает, что цель поражена или первым, или вторым, или обоими стрелками, т. е. хотя бы одним из стрелков. Значит, теорема о вероятности суммы двух несовместных событий неприменима для решения этой задачи. Действительно, если бы эта теорема была верна, то в рассматриваемой задаче мы получили бы, что вероятность события $A+B$ равна 1,5, что невозможно.

Основой для решения подобных задач служит следующая

Теорема. *Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности произведения этих же событий*:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB). \qquad (18)$$

В справедливости этой теоремы можно убедиться, рассматривая диаграмму Эйлера-Венна для совместных событий A и B (черт. 4).



Черт. 4

Если события A и B являются несовместными, то $AB=Z$ и, следовательно, $P(AB)=0$. Тогда формула (18) для несовместных событий будет иметь следующий вид: $P(A+B)=P(A)+P(B)$, если $AB=Z$. Эта формула была получена нами во втором пункте.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи, приведенной в начале параграфа.

Вероятность того, что мишень будет поражена первым или вторым стрелком, т. е. хотя бы одним стрелком, вычисляется по формуле (18). Но так как события A и B независимые, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=$$
$$=0{,}8+0{,}7-0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}94.$$

Упражнения

66. Вероятность выполнения обязательств одной бригадой равна 0,9, а другой — 0,95. Какова вероятность того, что первая или вторая бригады выполнят свои обязательства, если они работают независимо друг от друга?

67. Вероятность того, что интересующая нас книга находится в фондах одной библиотеки, равна 0,7, а в фондах другой — 0,55. Найти вероятность наличия книги в фондах хотя бы одной библиотеки.

6. Примеры решения задач на совместное применение теорем о вероятности суммы и произведения событий.

Задача 1. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,8, второго — 0,7. Какова вероятность того, что один стрелок промахнется, а другой — попадет в цель?

Решение. Пусть событие A — попадание в цель первого стрелка, событие B — попадание в цель второго стрелка. Используя союзы «и», «или», частицу «не», вопрос задачи можно записать по-иному, а именно: «Какова вероятность того, что первый стрелок попадет в цель и второй не попадет или первый стрелок не попадет в цель и второй попадет?» Следовательно, нам надо найти вероятность события $A\bar{B}+\bar{A}B$. Так как по условию задачи события A и B независимые[1], а события $A\bar{B}$ и $\bar{A}B$ несовместны, то

$$P(A\bar{B}+\bar{A}B)=P(A)\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A})\cdot P(B)=$$
$$=0,8\cdot 0,3+0,2\cdot 0,7=0,38.$$

Задача 2. Вероятность того, что ученик сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экзамен — 0,8 и третий экзамен — 0,7. Какова вероятность того, что ученик сдаст хотя бы один экзамен, если считать экзамены независимыми друг от друга?

Решение. События: ученик сдаст хотя бы один экзамен и ученик не сдаст ни одного экзамена — являются противоположными. Пусть событие A означает, что ученик сдаст хотя бы один экзамен. Если A_1, A_2, A_3 означают соответственно сдачу первого, второго и третьего экзамена, то $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ означают соответственно не сдачу первого, второго, третьего экзамена. Тогда событие $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ означает, что ученик не сдаст ни одного экзамена. Но так как события A и $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ противоположные, то $P(A)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1$. Отсюда $P(A)=1-$

[1] Из независимости событий A и B следует независимость событий A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

$-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$. Вследствие того что события A_1, A_2, A_3 независимые, имеем $P(A)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=1-$ $-0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}994$.

Упражнения

68. Стрелок ведет огонь по цели, движущейся на него. Вероятность попадания в цель при первом выстреле 0,4 и увеличивается на 0,1 при каждом последующем выстреле. Какова вероятность получить 2 попадания при трех выстрелах?

69. Монета подбрасывается 4 раза. Какова вероятность того, что при этом хотя бы один раз появится герб?

70. В коробке находится 2 красных, 3 синих и 2 зеленых карандаша. Из нее наудачу без возвращения извлекают по одному карандашу. Найти вероятность того, что красный карандаш появится ранее синего.

71. Профсоюзной организацией для детей, выезжающих летом на отдых, выделено 12 путевок в пионерский, 8 — в туристический и 5 — в военно-спортивный лагерь. Какова вероятность того, что три друга попадут в один лагерь, если их родители независимо друг от друга приобрели по одной путевке?

72. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение часа равна 0,75, а второго — 0,8. Какова вероятность того, что в течение часа будет нарушение в работе только одного станка, если станки работают независимо друг от друга?

§ 4. Геометрические вероятности

1. «Геометрическая схема» испытания. «Классическая схема», основанная на понятии равновозможности конечного числа исходов испытания, при изучении большинства явлений реального мира является недостаточной. На практике часто встречаются такие испытания, исходы которых, как правило, являются или неравновозможными, или их число бесконечно.

Так, если испытание состоит в том, что сигнальщик в течение часа должен принять мгновенный световой сигнал, то его возможными исходами можно считать появление сигнала в любой момент времени в течение этого часа. Если испытание состоит в том, что разведчик должен нарушить линию связи длиной 2 *км*, то возможными исходами этого испытания можно считать разрыв линии связи в любой точке.

Множество исходов таких и аналогичных им испытаний бесконечно. Оно может быть иллюстрировано геометрически в виде совокупности точек отрезка прямой, плоской фигуры или пространственного тела. В связи с этим такую схему испытания принято называть геометрической схемой.

2. Вероятности, вычисляемые как отношения мер. Пусть в результате испытания наудачу выбранная точка обязательно появится в области S. Требуется найти вероятность того, что эта точка окажется в области s, являющейся частью области S.

Как указывалось в первом пункте параграфа, мы будем рассматривать области одного, двух и трех измерений. Так как число возможных исходов таких испытаний и число исходов, благоприятствующих рассматриваемым событиям, бесконечно, то формулу (1) для непосредственного подсчета вероятностей применять нельзя.

Введем следующее допущение. Пусть исходы испытания распределены равномерно. Это значит, что если разделить некоторую область S на конечное число равновеликих частей $s_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, то события E_i, означающие попадание наудачу выбранной точки из области S в любую s_i ее часть, равновозможны, т. е. можно считать, что вероятность попадания наудачу выбранной точки из области S в какую-либо часть s этой области пропорциональна мере этой части и не зависит от ее расположения и формы.

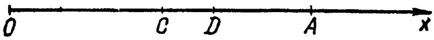
Следовательно,

$$P(E) = \frac{m(s)}{m(S)}, \tag{19}$$

где $P(E)$ — вероятность того, что наудачу выбранная точка из области S окажется в области s, а $m(s)$ и $m(S)$ есть меры соответствующих областей, выраженных в единицах длины, площади или объема.

Пример 1. Если абонент ждет телефонного вызова с двух до трех часов, то какова вероятность того, что этот вызов произойдет в течение десяти минут после половины третьего?

Решение. Пусть событие E—вызов произошел в течение десяти минут после половины третьего. Изобразим все исходы испытания в виде отрезка OA на прямой

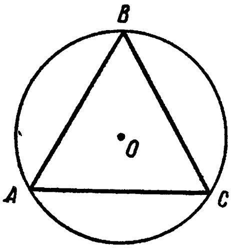


Черт. 5

Ox (черт. 5). Событие E произойдет, если точка (вызов) окажется на отрезке CD. Следовательно,

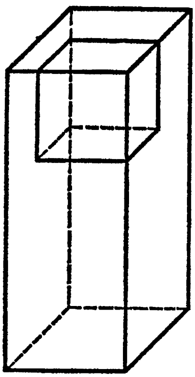
$$P(E)=\frac{CD}{OA}=\frac{1}{6}.$$

Пример 2. В круг, радиус которого равен R, вписан правильный треугольник. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка круга окажется внутри треугольника?



Черт. 6

Решение. Пусть событие E состоит в том, что наудачу выбранная точка окажется внутри треугольника. Так как точка выбирается наудачу, можно допустить, что все исходы испытания распределены равномерно. Следовательно, $P(E)=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\text{круга}}}$ (черт. 6). Но площадь круга равна πR^2, а площадь треугольника—$\frac{3\sqrt{3R^2}}{4}$. Отсюда $P(E)=\frac{3\sqrt{3R^2}}{4\pi R^2}\approx 0{,}414$.



Черт. 7

Пример 3. Внутри прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 4 *см*, 6 *см*, 10 *см*, наудачу выбирается точка M. Какова вероятность того, что она окажется внутри данного куба, ребро которого равно 3 *см* (черт. 7)?

Решение. Пусть событие E—точка оказалась внутри куба с ребром, равным 3 *см*. Будем считать, что исходы испытания распределены равномерно. Тогда вероятность наступления события E пропорциональна мере этого куба и равна $P(E)=\frac{v_{\text{куба}}}{v_{\text{параллелепипеда}}}$. Но объем куба равен 27 *см*³, а объем параллелепипеда — 240 *см*³.

Следовательно, $P(E)=\frac{27}{240}\approx 0,113$.

Замечание. В отличие от задач, решаемых по «классической схеме», в рассмотренных задачах вероятность появления события может быть выражена иррациональным числом.

Упражнения

73. Минное заграждение поставлено в одну линию с интервалами между минами в 100 *м*. Какова вероятность того, что корабль шириной 20 *м*, пересекая это заграждение под прямым углом, подорвется на мине? (Размерами мины можно пренебречь.)

74. На окружности радиуса R наудачу выбирается точка. Найти вероятность того, что выбранная точка будет находиться от точки A, фиксированной на данной окружности, на расстоянии, не превышающем R.

75. Из фиксированной вершины квадрата произвольным радиусом, меньшим его диагонали, проведена окружность. Какова вероятность того, что дуга пересечет стороны квадрата, имеющие эту вершину одним из своих концов?

76. В круг радиуса R вписан правильный шестиугольник. Какова вероятность того, что наудачу выбранная точка внутри круга окажется внутри шестиугольника?

77. Шар радиуса $r=2$ *см* наудачу бросают в круг радиуса $R=25$ *см*, в котором вырезано квадратное отверстие со стороной $a=14$ *см*. Какова вероятность того, что шар пройдет через это отверстие, не задев его края, если он непременно попадает в круг?

78. В 25 *см* от центра шара, радиус которого равен 15 *см*, находится точечный источник света. Какова вероятность того, что наудачу взятая точка на поверхности шара окажется освещенной?

3. Вероятность суммы и произведения событий. В третьем параграфе нами были изучены теоремы о вероятности суммы и произведения двух или более событий для случая конечного числа исходов испытания. Эти же теоремы остаются справедливыми и для испытаний, описываемых «геометрической схемой».

Рассмотрим вначале задачу на применение теорем о вероятности суммы двух событий.

Пример 1. На стержне AB, длина которого равна 36 *см*, нанесена наудачу тонкая риска. Какова вероятность того, что эта риска окажется не далее a от конца A или не далее b от середины стержня (1) $a=6$ *см*, $b=2$ *см*; 2) $a=12$ *см*, $b=10$ *см*)?

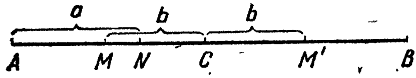
Черт. 8

Решение. Пусть событие E_1 — риска оказалась не далее a от конца A, событие E_2 — риска оказалась не далее b от середины стержня.

1. Если $a=6$ *см*, $b=2$ *см*, то события E_1 и E_2 — несовместные (черт. 8). Следовательно,

$$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)=\frac{6}{36}+\frac{4}{36}\approx 0{,}28.$$

2. Если $a=12$ *см*, $b=10$ *см*, то события E_1 и E_2 совместные (черт. 9). Из рисунка видно, что если риска



Черт. 9

окажется на отрезке MN, то одновременно происходит событие E_1 и E_2. Следовательно,

$$P(E_1+E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1E_2)=\frac{12}{36}+\frac{20}{36}-\frac{4}{36}\approx 0{,}78.$$

Теперь рассмотрим способы решения задач, в которых наудачу независимо друг от друга выбираются две или три точки. Решение этих задач основано на теореме о вероятности произведения независимых событий.

Пример 2. На отрезке $AB=a$ наудачу независимо друг от друга выбираются две точки M и N. Какова вероятность того, что эти точки окажутся не далее b от точки A $(b\leqslant a)$?

Решение. Пусть события E_1 и E_2 означают появление соответственно точек M и N не далее b от точки A.

вероятности наступления событий E_1 и E_2 равны $P(E_1)=\frac{b}{a}$, $P(E_2)=\frac{b}{a}$. Но события E_1 и E_2 независимые, следовательно, $P(E_1E_2)=P(E_1)\cdot P(E_2)=\frac{b^2}{a^2}$.

Аналогично решается задача нахождения вероятности того, что наудачу взятые три точки окажутся от точки A не далее чем на b. В этом случае $P(E_1E_2E_3)=P(E_1)P(E_2)P(E_3)=\frac{b^3}{a^3}$.

Обратите внимание на полученные ответы. Первый ответ мы можем истолковать как отношение площадей квадратов, стороны которых равны соответственно b и a. Второй ответ можно истолковать как отношение объемов кубов, ребра которых соответственно равны b и a. Следовательно, независимый выбор наудачу двух точек на отрезке прямой можно заменить выбором одной точки на квадрате, сторона которого равна этому отрезку. А независимый выбор трех точек на отрезке прямой равносилен выбору одной точки в кубе, ребро которого равно этому отрезку.

Выполните следующие упражнения.

1. На отрезке $AB=a$ наудачу выбирается точка M, а на отрезке $CD=b$ — точка N $(a\neq b)$. Дайте геометрическое истолкование множества исходов их совместного выбора.

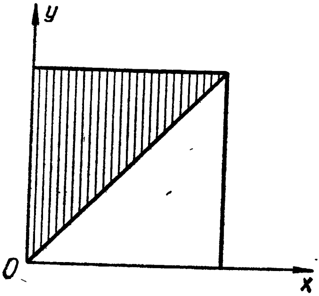
2. Дайте геометрическое истолкование множества исходов испытания, состоящего в том, что точка A наудачу выбирается на окружности радиуса R, а точка B — на отрезке $CD=a$.

3. Три точки A, B, C независимо друг от друга выбираются соответственно на отрезках $DE=a$, $MN=b$, $PQ=c$. Дайте геометрическое истолкование множества исходов испытания, если: 1) $a\neq b\neq c$; 2) $a=b=c$.

Пример 3. На отрезке $AB=l$ независимо друг от друга выбираются наудачу две точки M и N. Какова вероятность того, что точка M окажется ближе к точке A, чем точка N?

Решение. Пусть $AM=x$, $AN=y$. Рассматриваемому событию будут благоприятствовать лишь те точки, которые удовлетворяют условию $x<y$. Множество всех возможных исходов испытания можно изобразить в виде

квадрата, сторона которого равна l (черт. 10). Множество исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию, геометрически изображается точками заштрихованного треугольника, так как координаты всех точек этого треугольника связаны соотношением $y > x$. Следовательно, искомая вероятность равна 0,5.

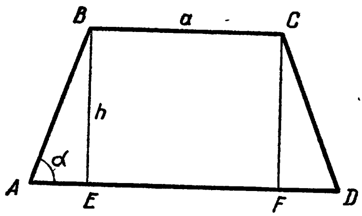


Черт. 10

Упражнения

79. На отрезке $AB = a$ наудачу выбирается точка M, а на отрезке $CD = b$ — точка N. Какова вероятность того, что точки M и N делят отрезки AB и CD так, что отношение $\frac{AM}{MB} > 1$, а отношение $\frac{CN}{ND} < 1$?

80. Точка A наудачу выбирается на окружности, радиус которой равен R, а точка B на отрезке $CD = a$. Найти вероятность того, что точка A окажется на дуге, длина которой равна R, а точка B окажется расположенной от конца отрезка CD не далее чем на $0{,}4a$.



Черт. 11

81. Какова вероятность того, что две наудачу выбранные точки внутри круга радиуса R окажутся внутри вписанного в этот круг квадрата?

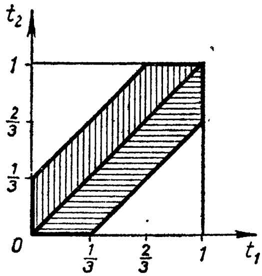
82. Два действительных числа x и y выбирают наугад так, что сумма их квадратов меньше 64. Какова вероятность того, что сумма этих чисел окажется меньше восьми?

83. Два действительных числа x и y выбирают наугад так, что $|x| < 3$, а $|y| < 5$. Какова вероятность того, что эти два числа окажутся положительными?

84. В трапеции, размеры которой даны на чертеже 11, выбирается наудачу точка M. Какова вероятность того, что она окажется в одном из треугольников?

4. Задача о встрече. Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между 12 часами и часом. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Какова вероятность встречи этих лиц, если каждый в течение часа приходит к этому месту наудачу, а моменты прихода независимы друг от друга?

Решение. На прямой отложим отрезок, равный единице длины, принимая за единицу масштаба один час. Моменты случайного прихода лиц A и B можно изобразить точками на этом отрезке. Таким образом, нам необходимо выбрать наудачу две точки на данном отрезке. Обозначим моменты прихода лица A через x, а лица B — через y. Тогда множество всех возможных исходов испытания можно изобразить точками квадрата, сторона которого равна единице (черт. 12). Встреча произойдет лишь в том случае, если разность моментов прихода лиц A и B по абсолютной величине не будет превосходить $\frac{1}{3}$ (двадцать минут), т. е. если произойдет событие, удовлетворяющее неравенству $|x-y|<\frac{1}{3}$.



Черт. 12

Запишем это неравенство в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} y > x - \frac{1}{3}, \\ y < x + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Эта система неравенств задает область, заштрихованную на чертеже. Следовательно, искомая вероятность пропорциональна площади заштрихованной области и равна

$$P\left(|x-y| < \frac{1}{3}\right) = \frac{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1^2} \approx 0{,}56.$$

Теперь поставим к этой задаче следующий вопрос: «Сколько времени t они должны ждать друг друга, чтобы вероятность их встречи была равна 0,75?»

Значение t можно найти из равенства $P(|x-y| < t) = 0{,}75$. Но $P(|x-y| < t) = \frac{1-(1-t)^2}{1} = 0{,}75$.

Отсюда $(1-t)^2=0{,}25$ и $t=0{,}5$. Таким образом, чтобы вероятность их встречи была равна 0,75, они должны ждать друг друга 30 *мин*.

Упражнения

85. В соответствии с заданием на полет экипажам двух самолетов необходимо передать одно донесение по радио в любое время от 10 *ч* до 10 *ч* 15 *мин*. Для передачи донесения требуется 3 *мин*. Какова вероятность того, что радист одного самолета начнет передачу донесения тогда, когда радист другого самолета передачу своего донесения еще не закончит?

86. В течение 20 *мин* после девяти часов ученик A в случайный момент времени звонит по телефону ученику B и ждет 2 *мин*, после чего кладет трубку. В течение тех же 20 *мин* ученик B заходит в квартиру в случайный момент и остается дома в течение 5 *мин*. Какова вероятность того, что разговор между учениками состоится?

§ 5. Повторные независимые испытания с двумя исходами

1. Схема повторных независимых испытаний. Рассмотрим испытание, которое состоит в том, что опыт повторяется многократно, причем выполнены следующие условия:

1) все опыты независимы друг от друга, т. е. вероятность появления события A в каждом из них не зависит от того, произошло или не произошло рассматриваемое событие в других опытах;

2) каждый опыт имеет только два исхода: а) событие A произошло, б) событие A не произошло;

3) вероятность появления события A в каждом опыте постоянна и равна p, а, следовательно, вероятность непоявления события A равна $q=1-p$.

Так как в каждом из n проводимых опытов событие A может произойти или не произойти, то полученная схема повторных независимых испытаний с двумя исходами содержит 2^n точек. (Смотрите формулу 6.)

Примерами повторных независимых испытаний с двумя исходами могут служить: 1) многократное подбрасывание монеты; 2) стрельба по цели одиночными выстрелами, если нас интересует только попадание или промах; 3) технический контроль деталей, при котором требуется только установить, какой является деталь, стандартной или нестандартной.

Некоторые задачи, описываемые схемой повторных независимых испытаний, можно решать, используя формулу для непосредственного подсчета вероятностей или теоремы о вероятности суммы и произведения событий.

Пример 1. Монета подбрасывается 4 раза. Какова вероятность того, что при этом все 4 раза выпадет герб?

Решение. Проводятся 4 независимых испытания с двумя исходами. Число всех возможных исходов выпадения герба и цифры при четырехкратном подбрасывании монеты равно $2^4=16$, причем все эти исходы равновозможны. Но событие E, состоящее в том, что все 4 раза выпадет герб, может произойти только при одном исходе испытания, следовательно, $p(E)=\frac{1}{16}$.

Пример 2. Производится 3 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле постоянна и равна $p=0{,}6$. Какова вероятность того, что при этом в мишени будет ровно одна пробоина?

Решение. Проводится 3 независимых испытания с двумя исходами, причем вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6 и, следовательно, вероятность промаха $q=0{,}4$. Пусть события A_1, A_2, A_3 означают попадания в цель соответственно при первом, втором, третьем выстрелах, а события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ означают соответствующие промахи. Тогда событие $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ означает, что при трех выстрелах в мишени будет ровно одна пробоина. Заметим, что события $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; $\bar{A}_1A_2\bar{A}_3$; $\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ являются несовместными. Применяя теоремы о вероятности суммы несовместных событий и о вероятности произведения независимых событий, получим: $p(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3+\bar{A}_1A_2\bar{A}_3+\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)=p(A_1)\times p(\bar{A}_2)\cdot p(\bar{A}_3)+p(\bar{A}_1)\cdot p(A_2)\cdot p(\bar{A}_3)+p(\bar{A}_1)\cdot p(\bar{A}_2)\cdot p(A_3)=3pq^2=0{,}288$.

2. Формула Бернулли. Выведем формулу, позволяющую сразу вычислять вероятность появления события A ровно m раз при проведении n повторных независимых испытаний.

Пусть проводится n независимых испытаний с двумя исходами. Обозначим через A_i и $\overline{A}_i$ два возможных исхода i-го испытания, вероятности появления которых соответственно равны p и q для всех $i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Требуется найти вероятность события E_m, означающего, что при проведении n испытаний событие A появится m раз, а, значит, не появится $n-m$ раз. Тогда событие E_m будет представлять собой сумму событий вида $A_1A_2\ldots A_m\overline{A}_{m+1}\ldots\overline{A}_n$, (*) в которых события A_i и $\overline{A}_i$ могут появляться в любом порядке.

Очевидно, событий вида (*) будет столько, сколько можно составить перестановок из n элементов, из которых элемент A_i повторяется m раз, а элемент $\overline{A}_i$ повторяется $n-m$ раз. Это число событий равно

$$P_{m,\,n-m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=C_n^m.$$

(Вспомните формулы (5) и (8').) Но события вида (*) являются попарно несовместными. А так как проводимые опыты являются независимыми, то вероятность появления каждого события (*) равна p^mq^{n-m}. Применяя теорему о вероятности суммы попарно несовместных событий, найдем вероятность появления события E_m, равную

$$P(E_m)=C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Обозначим вероятность наступления события E_m символом $P_n(m)$, который означает вероятность появления события A ровно m раз при проведении n независимых испытаний. Тогда получим формулу

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{20}$$

которую называют *формулой Бернулли*.

Пример 1. Известно, что при каждом взвешивании равновозможна как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при пяти взвешиваниях получится 3 положительных ошибки?

Решение. Проводится 5 независимых опытов с двумя исходами, причем $p=q=0{,}5$. Тогда по формуле Бернулли вероятность появления трех положительных ошибок равна

$$P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}5^2=0{,}3125.$$

Пример 2. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при каждом броске равна 0,4. Что вероятнее ожидать: попадания трех мячей при четырех бросках мяча или попадания четырех мячей при шести бросках, если броски мяча считать независимыми?

Дано:

$$n_1=4,\quad n_2=6,\quad p=0{,}4,$$
$$m_1=3,\quad m_2=4,\quad q=0{,}6.$$

Вычислить $P_4(3)$ и $P_6(4)$.

Решение. По формуле Бернулли

$$P_4(3)=C_4^3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6\approx 0{,}1536;\ P_6(4)=C_6^4\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^2\approx 0{,}1382.$$

Следовательно, $P_4(3)>P_6(4)$, и вероятнее ожидать попадания трех мячей при четырех бросках мяча, чем попадания четырех мячей при шести бросках.

Упражнения

87. Для данного участника игры вероятность наброса кольца на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках кольца три кольца окажутся на колышке, если броски кольца считать независимыми?

88. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказа двух приборов при четырех независимых испытаниях или отказа трех приборов при испытании шести?

89. Партия изделий содержит 5% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание четырех изделий одно изделие окажется бракованным?

90. Вероятность приживания саженца яблони равна 0,8. Найти вероятность того, что из восьми посаженных яблонь приживется семь или восемь.

3. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Вам известны формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Возникает вопрос, нельзя ли получить формулу разложения бинома $(a+b)^n$, где n — любое натуральное число.

Для ответа на этот вопрос найдем вначале разложение бинома $(a+b)^3$, который запишем в виде $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$.

Чтобы перемножить биномы $a+b$, стоящие в правой части последнего равенства, необходимо всеми возможными способами выбрать a или b в каждом биноме, перемножить их и сложить полученные результаты. Число таких выборок равно числу перестановок из двух элементов a и b по три в каждой. Ясно, что в этих выборках элементы a и b могут повторяться (например, из каждого бинома выбран элемент a). Следовательно, число всех полученных произведений равно $\bar{P}_2^3=8$, и, значит, разложение бинома $(a+b)^3$ состоит из восьми слагаемых.

Число повторений сомножителей a и b в каждом произведении можно задать следующей таблицей:

b	0	1	2	3
a	3	2	1	0

Найдем теперь число произведений, содержащих m раз сомножитель b и $3-m$ раз сомножитель a, где $m=0, 1, 2, 3$. Число перестановок из элементов a и b, в которых элемент a повторяется $3-m$ раз, а элемент b повторяется m раз, равно $P_{m,\,3-m}=\frac{3!}{m!\,(3-m)!}=C_3^m$ (смотрите формулу (8′)).

Отсюда произведение a^3 встречается $C_3^0=1$ раз, произведение a^2b встречается $C_3^1=3$ раза и т. д. Следовательно, искомое разложение бинома имеет вид:

$$(a+b)^3=C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3.$$

Вообще пусть требуется найти разложение бинома $(a+b)^n$. Рассуждениями, аналогичными тем, с помощью которых было найдено разложение бинома $(a+b)^3$, получим формулу:

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+ \\ +C_n^ma^{n-m}b^m+\ldots+C_n^nb^n, \qquad (21)$$

которая носит название *бинома Ньютона*.

Коэффициенты разложения бинома $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ называются *биномиальными коэффициентами*.

Непосредственное вычисление показывает, что:

$$(a+b)^0=1,$$
$$(a+b)^1=a+b,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, \ \ldots .$$

Выпишем полученные коэффициенты в виде таблицы:

$n \diagdown m$	0	1	2	3	4	....
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
.						
.						
.						
.	.	.	.	.	.	. . .

Заметим, что в первом столбце и в конце каждой строки стоят единицы, а остальные числа таблицы представляют собой сумму числа, стоящего непосредственно сверху, и числа, стоящего сверху слева. Например, $6=3+3$. В то же время числа, образующие таблицу, являются биномиальными коэффициентами C_n^m. В связи с этим предыдущий пример $6=3+3$ можно записать в виде $C_4^2=C_3^2+C_3^1$.

В общем виде правило заполнения таблицы может быть записано формулой:

$$C_n^m=C_{n-}^m+C_{n-1}^{m-1}. \tag{22}$$

Действительно,

$$C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}=\frac{(n-1)!}{m!\,(n-m-1)!}+\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!}=$$
$$=\frac{(n-1)}{(m-1)!\,(n-m-1)!}\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}\right)=$$
$$=\frac{(n-1)!\,n}{(m-1)!\,(n-m-1)!\,m\,(n-m)}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=C_n^m.$$

Используя формулу (22), рассматриваемую таблицу можно продолжить до любого натурального n.

Полученная таблица называется *треугольником Паскаля.* Она дает удобный способ получения биномиальных коэффициентов. Так, для $n=5$ будем иметь:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Если в формуле бинома Ньютона (21) положить $a=b=1$, то получим тождество:

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n.$$

Из этого тождества следует, что общее число сочетаний из n элементов равно 2^n. Другими словами, сумма всех членов n-й стороны треугольника Паскаля равна 2^n.

Упражнения

91. Пользуясь формулой $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$, составьте треугольник Паскаля, содержащий $n=15$ строк.

92. Пользуясь формулой бинома Ньютона, запишите разложения следующих биномов:

$$(a+b)^8;\quad (a+1)^7;\quad (a^2+1)^5;\quad (2a+b)^6.$$

93. Чему равен коэффициент при члене a^2b^3 в разложении бинома $(a+b)^6$?

94. Чему равен коэффициент при члене a^3b^4 в разложении бинома $(3a+2b)^7$?

95. Сколькими способами 10 человек можно разделить на две команды A и B, допуская случай, при котором все 10 человек могут попасть в одну команду?

96. Сколько делителей, включая единицу и само число, имеет число 210. (Число 210 имеет 4 простых делителя: 2, 3, 5, 7.)

97. Какова вероятность того, что наудачу выбранный делитель числа 210 окажется простым?

4. Вероятность появления рассматриваемого события не менее m раз. Запишем разложение бинома Ньютона $(q+p)^n$:

$$(q+p)^n=C_n^0q^n+C_n^1pq^{n-1}+\ldots+ \\ +C_n^mp^mq^{n-m}+\ldots+C_n^np^n. \qquad (23)$$

Используя формулу Бернулли, разложение (23) можно записать в виде:

$$(q+p)^n=P_n(0)+P_n(1)+\ldots+P_n(m)+\ldots+P_n(n).$$

Но $q+p=1$, следовательно,

$$p_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+\ldots P_n+(m)+\ldots+P_n(n)=1,$$

или

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1. \qquad (24)$$

Этот же результат можно получить из того, что $\sum_{m=0}^{n} P_n(m)$ представляет собой достоверное событие.

Таким образом, *сумма вероятностей появления рассматриваемого события m раз, где $m=0, 1, 2, \ldots, n$ равна единице.*

Из формулы (24) можно получить ряд следствий, которые находят широкое применение при решении задач.

Пример 1. Вероятность солнечной погоды в некоторой местности для каждого дня равна 0,4. Какова вероятность того, что в течение трех дней хотя бы один день будет солнечная погода?

Решение. По условию задачи $n=3$, $p=0{,}4$, $q=0{,}6$. Событие E, состоящее в том, что хотя бы один день будет солнечная погода, можно разложить на несовместные частные случаи $E=E_1+E_2+E_3$, где E_1, E_2, E_3 означают соответственно солнечную погоду в течение одного, двух, трех дней. Тогда вероятность события E равна

$$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=P_3(1)+P_3(2)+P_3(3).$$

Но $P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=1$. Следовательно, $P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=1-P_3(0)$. А так как $P_3(0)=q^3$, то, используя знак $\sum$, можно записать:

$$\sum_{m=1}^{3} P_3(m)=1-q^3.$$

Значит,

$$\sum_{m=1}^{3} P_3(m)=1-0{,}6^3=0{,}784.$$

Вообще вероятность того, что при проведении n независимых испытаний событие A наступит хотя бы один раз, вычисляется по формуле:

$$\sum_{m=1}^{n} P_n(m)=1-q^n. \qquad (25)$$

Вероятность того, что при проведении n независимых испытаний событие A наступит не менее m раз, вычисляется непосредственным суммированием по формуле:

$$P_n(m \geqslant k) = \sum_{m=k}^{n} P_n(m). \qquad (26)$$

Если сумма, стоящая в правой части равенства (26), содержит более $\frac{n}{2}$ членов, то удобнее использовать зависимость между противоположными событиями.

Тогда

$$P_n(m \geqslant k) = 1 - P_n(m < k) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m). \qquad (27)$$

Пример 2. Вероятность того, что стрелок попадет в цель при одном выстреле, равна 0,6. Производится 4 независимых выстрела. Какова вероятность того, что при этом произойдет не менее трех попаданий?

Решение. По условию задачи $n=4$, $m \geqslant 3$, $p=0{,}6$, $q=0{,}4$. По формуле (26)

$$P_4(m \geqslant 3) = C_4^3 p^3 q + C_4^4 p^4 = 4 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 + 0{,}6^4 = 0{,}4752.$$

Пример 3. Найти вероятность осуществления более двух разговоров по телефону при пяти очередных вызовах, если вероятность состоявшегося разговора равна $\frac{2}{3}$.

Решение. По условию задачи $n=5$, $m \geqslant 2$, $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{1}{3}$. По формуле (27)

$$P_5(m \geqslant 2) = 1 - P_5(0) - P_5(1) = 1 - \\ - \left(\frac{1}{3}\right)^5 - C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0{,}95.$$

Упражнения

98. Производится 4 независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,5. Для разрушения цели достаточно хотя бы одного попадания. Какова вероятность того, что цель будет разрушена?

99. Вероятность появления хотя бы одного события A при четырех независимых опытах равна 0,9744. Какова вероятность появления этого события при одном испытании?

100. На контрольной работе ученикам предложено 10 вопросов, на каждый из которых дано два ответа: правильный и неправильный. Для получения хорошей оценки ученикам надо указать не менее 80% правильных ответов. Какова вероятность получения хорошей оценки при простом отгадывании?

101. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при одном броске равна 0,5. Что вероятнее ожидать, попадания не менее трех мячей в корзину при четырех бросках мяча или попадания не менее четырех мячей при шести бросках, если броски мяча считать независимыми?

Ответы

8. $p=\frac{3}{11}$. **9.** $p=0{,}2667$. **10.** $p=\frac{3}{11}$. **11.** $p=0{,}125$. **12.** $p_1=\frac{11}{15}$, $p_2=\frac{2}{3}$, $p_3=\frac{4}{15}$. **13.** $p=\frac{1}{3}$. **14.** $p=0{,}4$. **15.** $p=0{,}25$. **16.** $N=24$. **17.** $N=6$. **18.** $N=24$. **19.** $N=3750$. **20.** $N=9^4$. **21.** $N=2\cdot4\cdot3=24$. **22.** $p_{33}^{3}=32736$. **23.** $p_{10}^{3}-p_{9}^{2}=9\cdot9\cdot8=648$. **24.** $p_4=4!$. **25.** $p_{20}^{2}=380$. **26.** $p_{10}=10!$. **27.** $p_7^4=840$. **28.** $p_{3,2}=\frac{5!}{3!2!}=10$. **29.** $p_{4,3,2}=\frac{9!}{4!3!2!}=1260$. **30.** $p_{3,2,2,2,1}=\frac{10!}{3!2!2!2!1!}=75\,600$. **31.** $\overline{P}_2^6=2^6=64$. **32.** $\overline{P}_5^4=5^4=625$. **33.** $\overline{P}_2^n=2^n$. **34.** $N=4\cdot5^5$. **35.** $N=5\cdot3!\cdot4!=720$. **36.** $c_5^2=10$. **37.** $c_4^2=6$. **38.** c_n^m. **39.** $c_{10}^3=120$. **40.** $c_7^2=21$. **41.** $p=\frac{3!2!1!}{6!}=0{,}0167$. **42.** $p=\frac{4}{c_5^3}=0{,}4$. **43.** $p=\frac{c_4^2\cdot c_2^1}{c_6^3}=0{,}6$. **44.** $p=\frac{c_n^m}{2^n}$. **45.** $p=\frac{2\cdot c_{10}^4}{c_{12}^6}\approx0{,}4546$. **46.** $p=\frac{1}{p_8^3}=\frac{1}{120}$. **47.** $p=\frac{4\cdot5^5}{9\cdot10^5}\approx$ $\approx0{,}0139$. **48.** $p=\frac{5\cdot3!4!}{7!}\approx0{,}1429$. **49.** $p=\frac{c_5^2\cdot c_{25}^2}{c_{30}^4}\approx0{,}12$. **56.** $p=0{,}76$. **57.** $p=0{,}4$. **58.** $p=\frac{5}{14}$. **59.** $p=\frac{c_7^3\cdot c_5^1}{c_{12}^4}+$ $+\frac{c_7^4\cdot c_5^0}{c_{12}^4}\approx0{,}4242$. **60.** $p=0{,}19$. **61.** $p=0{,}3\cdot0{,}3\cdot0{,}7\cdot0{,}7=$ $=0{,}0441$. **62.** $p=\frac{1}{32}$. **63.** $p=\frac{1}{15}$. **64.** $p=\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{24}=0{,}144$.

65. $p=\frac{25}{100}\cdot\frac{24}{99}\cdot\frac{23}{98}\approx 0{,}0142$. 66. $p=0{,}9+0{,}95-0{,}9\cdot 0{,}95=$ $=0{,}995$. 67. $p=1-0{,}3\cdot 0{,}45=0{,}865$. 68. $p=0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4+$ $+0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}38$. 69. $p=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$. 70. $p=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}=0{,}4$. 71. $p=\frac{C_{12}^3+C_8^3+C_5^3}{C_{25}^3}\approx$ $\approx 0{,}1243$. 72. $p=0{,}75\cdot 0{,}2+0{,}25\cdot 0{,}8=0{,}35$. 73. $p=0{,}2$. 74. $p=\frac{1}{3}$. 75. $p=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0{,}7072$. 76. $p=\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0{,}6576$. 77. $p=\frac{(a-2r)^2}{\pi R^2}\approx 0{,}05$. 78. $p=0{,}2$. 79. $p=0{,}25$. 80. $p=\frac{0{,}4aR}{2\pi Ra}=\frac{1}{5\pi}$. 81. $p=\left(\frac{2R^2}{\pi R^2}\right)^2=\frac{4}{\pi^2}$. 82. $p=\frac{3\pi+2}{4\pi}$. 83. $p=0{,}25$. 84. $p=\frac{h\operatorname{ctg}\alpha}{a+h\operatorname{ctg}\alpha}$. 85. $p=\frac{144-81}{144}=0{,}437$. 86. $p=\frac{400-162-112{,}5}{400}\approx 0{,}3125$. 87. $p_6(3)=C_6^3\cdot 0{,}3^3\times$ $\times 0{,}7^3\approx 0{,}185$. 88. $p_4(2)>p_6(3)$. 89. $p_4(1)=C_4^1\cdot 0{,}05\times$ $\times 0{,}95^3\approx 0{,}171$. 90. $p_8(7)+p_8(8)=C_8^7\cdot 0{,}8^7\cdot 0{,}2+0{,}8^8=0{,}503$. 93. $C_5^3=10$. 94. $C_7^4 3^3\cdot 2^4=15120$. 95. $N=2^{10}=1024$. 96. $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=2^4=16$. 97. $p=0{,}25$. 98. $p_4(m\geqslant 1)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{16}$. 99. $p=0{,}6$. 100. $p_{10}(m\geqslant 8)\approx 0{,}0547$. 101. $p_4(m\geqslant 3)<p_6(m\geqslant 4)$.

МНОГОЧЛЕНЫ И ИХ КОРНИ

Г. Б. Хасин

§ 1. Основные понятия

Многочленом степени n от переменного x будем называть алгебраическое выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad (1)$$

где n — целое неотрицательное число, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — любые числа, причем $a_n \neq 0$.

Многочлен нулевой степени есть отличная от нуля константа (или постоянная). Будем также считать многочленом константу, равную нулю; такой многочлен будем называть *нуль-многочленом* или просто нулем. В отличие от всех других многочленов, нуль-многочлен не имеет степени.

Термины и обозначения

1) Многочлены от переменного x будем обозначать символами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ и т. д.

2) Степень многочлена $P(x)$ обозначим так: ст. $P(x)$.

3) Числа $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ будем называть коэффициентами многочлена (1). Коэффициент a_n назовем *старшим коэффициентом*, а коэффициент a_0 — *свободным членом*. Например, коэффициентами многочлена

$$2x^3 - \sqrt{3}\,x^2 - \frac{2}{3}x + 1$$

являются числа 2, $-\sqrt{3}$, $-\frac{2}{3}$, 1; из них 2 — старший коэффициент, 1 — свободный член.

4) Одночлены $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$, ..., $a_1 x$, a_0 называются *членами многочлена* (1). Если какой-нибудь коэффициент равен нулю, то член с этим коэффициентом не пишут. Если коэффициент, отличный от a_0, равен единице, то его также не пишут. Например, многочлен

$$\frac{1}{7}x^5+x^4-\sqrt{2}x^2+\frac{3}{5}x+7$$

имеет коэффициенты $\frac{1}{7}$, 1, 0, $-\sqrt{2}$, $\frac{3}{5}$, 7; многочлен x^6 имеет коэффициенты 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0.

Подводя итог сказанному, мы должны твердо уяснить, что многочлен можно считать известным тогда и только тогда, если известны все его коэффициенты и порядок их следования.

Задание 1

1) Составьте многочлен, если даны его коэффициенты: а) $-\frac{2}{3}$, $\sqrt{5}$, 0, 1; б) 1, 2, 0, 0, 0.

2) Сколько можно составить многочленов с коэффициентами 5, —7, 2, 0, взятыми в любом порядке?

Замечания. 1. При знакомстве с алгеброй вы понимали под словом «многочлен» любую алгебраическую сумму одночленов. Теперь под словом «многочлен» мы понимаем лишь сумму одночленов определенного вида. А именно каждый одночлен должен быть произведением числа на целую неотрицательную степень переменного. Например, выражение

$$2x^2-\frac{1}{x}+7$$

не является многочленом с нашей точки зрения.

2. Многочлены записывают обычно в виде (1), располагая его члены по убывающим степеням переменного. Например, выражение

$$x+2+3x^3-7x^2$$

следует считать неудачно записанным многочленом. Его следует записать в виде (1):

$$3x^3-7x^2+x+2.$$

Из определения многочлена следует, что два многочлена мы считаем равными, если они имеют одинаковую степень и соответствующие коэффициенты их равны. Такое равенство многочленов будем называть равенством их в *алгебраическом смысле.*

Задание 2

Определите, какие из данных многочленов равны между собой:

а) $P_1(x)=\sin\frac{\pi}{6}\cdot x^3-\sqrt{4+2\sqrt{3}}\,x^2-x+\log_5 1;$

б) $P_2(x)=0;$ в) $P_3(x)=\frac{1}{2}x^3-(1+\sqrt{3})\,x^2-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x;$

г) $P_4(x)=\cos\frac{\pi}{2}x^2-\left[4-\left(\log_2\frac{1}{4}\right)^2\right]x-\left(3-9^{\frac{1}{2}}\right).$

Обратим внимание на одну тонкость, связанную с понятием равенства двух многочленов. Дело в том, что на многочлен

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

можно смотреть не только как на алгебраическое выражение, но и как на функцию. Эта функция каждому числу x_0 ставит в соответствие число

$$P(x_0)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0.$$

Но тогда можно говорить о равенстве двух многочленов как о равенстве двух функций.

Известно, что две функции называются равными, если они имеют одинаковые области определения и каждому числу из этой общей области определения и та и другая функция ставит в соответствие одно и то же число.

Например, функции $f(x)=(x-2)^2$ и $g(x)=x^2-4x+4$ равны, так как их области определения представляют собой множество всех чисел, причем каждому числу x_0 функции f и g ставят в соответствие равные числа $(x_0-2)^2$ и $x_0^2-4x_0+4$.

Равенство двух многочленов, понимаемое в этом смысле, будем называть равенством в *функциональном смысле.*

Итак, мы располагаем двумя понятиями равенства на множестве многочленов. Оказывается, эти два понятия равенства на множестве многочленов эквивалентны.

Иначе говоря, если два многочлена равны в алгебраическом смысле, то они равны и в функциональном смысле и наоборот. Разумеется, это утверждение следует доказать. Сейчас мы докажем только одну часть этого утверждения.

Предположим, что два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ равны в алгебраическом смысле. Это значит, что $P(x)$ и $Q(x)$ представляют собой одно и то же алгебраическое выражение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Тогда функции $P(x)$ и $Q(x)$ имеют одну и ту же область определения, и, кроме того, каждому числу x_0 из этой области функции $P(x)$ и $Q(x)$ ставят в соответствие одно и то же число

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0.$$

Поэтому $P(x)$ и $Q(x)$ равны в функциональном смысле.

Нам следовало бы доказать и обратное утверждение, но сделать это не так легко, и мы дадим его доказательство позже в § 4. Пока же мы доказали следующее утверждение.

Если два многочлена равны в алгебраическом смысле, то они равны и в функциональном смысле.

В дальнейшем равенство многочленов мы будем понимать только в алгебраическом смысле.

Основные операции

Вам, конечно, известно, что два многочлена, как и любые два алгебраические выражения, можно складывать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов. Отметим только, что при этом и сумма и произведение двух многочленов есть снова многочлен. Таким образом, на множестве многочленов определены две операции: сложение и умножение. Эти операции, так же как сложение и умножение чисел, удовлетворяют:

1) законам коммутативности сложения и умножения —

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x),$$
$$P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x);$$

2) законам ассоциативности сложения и умножения —

$$[P(x)+Q(x)]+R(x)=P(x)+[Q(x)+R(x)],$$
$$[P(x)\cdot Q(x)]\cdot R(x)=P(x)\cdot[Q(x)\cdot R(x)];$$

3) закону дистрибутивности —

$$[P(x)+Q(x)]\cdot R(x)=P(x)\cdot R(x)+Q(x)\cdot R(x).$$

Полезно знать и некоторые другие свойства сложения и умножения многочленов.

I. *Степень суммы двух или более многочленов не выше, чем наибольшая из степеней слагаемых (если слагаемые многочлены и сумма не равны нулю).*

Примеры. 1) $P(x)=2x^3+\sqrt{3}x+1$; $Q(x)=-3x^2+5$; $P(x)+Q(x)=2x^3-3x^2+\sqrt{3}x+6$; ст. $[P(x)+Q(x)]=3=$ $=$ ст. $P(x)$;

2) $P(x)=-2x^2+3x+5$; $Q(x)=2x^2+1$; $P(x)+Q(x)=3x+6$; ст. $[P(x)+Q(x)]=1<$ ст. $P(x)$, ст. $Q(x)$.

II. *Степень произведения двух или более многочленов, отличных от нуля, равна сумме степеней сомножителей.*

Пример. $P(x)=3x^2+2x+1$; $Q(x)=2x^3-5x+3$; $P(x)\cdot Q(x)=(3x^2+2x+1)\cdot(2x^3-5x+3)=6x^5+4x^4+2x^3-$ $-15x^3-10x^2-5x+9x^2+6x+3=6x^5+4x^4-13x^3-x^2+$ $+x+3$; ст. $[P(x)\cdot Q(x)]=5=$ ст. $P(x)+$ ст. $Q(x)$.

III. *Старший коэффициент произведения двух или более многочленов равен произведению старших коэффициентов сомножителей.*

Задание 3

1) $P(x)$ — многочлен степени n. Какую степень имеет многочлен $P^k(x)$?

2) Если $P(x)\neq 0$ и $Q(x)\neq 0$, то $P(x)\cdot Q(x)\neq 0$. Доказать.

IV. *Для любых двух многочленов существует и притом единственный многочлен, который является их разностью.*

Пример. $P(x)=3x^5+x^2+4x$; $S(x)=x^4-5x^2+3x+1$; $P(x)-S(x)=3x^5+x^2+4x-x^4+5x^2-3x-1=3x^5-x^4+$ $+6x^2+x-1$.

Справедливость свойств I—IV можно проверить на конкретных примерах. Выполните это самостоятельно.

Пример. Доказать, что функция $\sqrt[3]{x}$ не есть многочлен.

Решение. Предположим, что $\sqrt[3]{x}$ равен некоторому многочлену (в функциональном смысле). Тогда $\sqrt[3]{x}=P(x)$, поэтому $P^3(x)=x$. С другой стороны, ст. $P^3(x)=3\cdot$ ст. $P(x)$ (по свойству II), т. е. $3\cdot$ ст. $P(x)=1$, что невозможно, так как ст. $P(x)$ — целое число.

Упражнения

1. Найти многочлен, равный
$$(x+\sqrt{2})^4+(x-\sqrt{2})^4-(x^3+3x^2-1)(x^2+7x+2).$$

2. Если два квадратных трехчлена равны в функциональном смысле, то они равны и в алгебраическом смысле. Доказать.

3. Доказать дистрибутивный закон для разности:
$$[P(x)-S(x)]\cdot Q(x)=P(x)\cdot Q(x)-S(x)\cdot Q(x).$$

4. Если все коэффициенты многочлена — целые числа, то при всяком целом значении аргумента значение многочлена есть целое число. Доказать. Верно ли обратное утверждение?

5. Коэффициенты многочлена $P(x)$ — натуральные числа, меньшие 10. При $x_0=10$ значение многочлена $P(x)$ равно 83 547. Найти $P(x)$.

6. Доказать, что многочлен $x^4-6x^3+11x^2-6x+1$ есть квадрат некоторого многочлена.

7. Существует ли квадратный трехчлен, который есть квадрат некоторого многочлена и при любой перестановке своих коэффициентов сохраняет это свойство?

8. Доказать, что если многочлен — ограниченная функция, то этот многочлен — константа.

9. Старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен $1+\sqrt{2}$. Доказать, что при любом натуральном k многочлен $P^k(x)$ имеет иррациональный старший коэффициент.

10. Каждый из двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ является суммой квадратов двух многочленов. Доказать, что $P(x)\cdot Q(x)$ обладает этим же свойством.

11. Доказать, что многочлен $(x^2+2x+2)(4x^2+16x+25)$ можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов.

12. Составить многочлен степени 10, который при $x=1, 2, \ldots, 10$ принимает значения, равные соответственно $1, 2, \ldots, 10$.

13. Доказать, что функции $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt{x^2+1}$, $x+\sqrt[3]{x}$ не являются многочленами.

§ 2. Делимость многочленов

Мы знаем, что в множестве многочленов выполнима операция вычитания, обратная сложению. Попытаемся построить операцию, обратную умножению. Иначе говоря, для каждой пары многочленов $P(x)$ и $S(x)$ мы хотим найти такой многочлен $Q(x)$, чтобы $S(x)\cdot Q(x)=$ $=P(x)$. Простые рассуждения показывают, что это не всегда возможно. Например, если $P(x)=1$, а $S(x)=x$, то искомого многочлена $Q(x)$ не существует. Действительно, если $Q(x)\neq 0$, то ст. $[S(x)\cdot Q(x)]=1+$ст. $Q(x)\geqslant 1$, а ст. $P(x)=0$; поэтому равенство $S(x)\cdot Q(x)=P(x)$ невозможно. Если же $Q(x)=0$, то $S(x)\cdot Q(x)=0\neq P(x)$. Этот пример показывает, что в множестве многочленов нет операции, обратной умножению. В этом отношении множество многочленов напоминает множество целых чисел.

Итак, не для всякой пары многочленов $P(x)$ и $S(x)$ существует многочлен $Q(x)$, такой, что $P(x)=S(x)\cdot Q(x)$.

Это, разумеется, не означает, что нельзя привести противоположного примера. Если $P(x)=x^3+1$, а $S(x)=$ $=x+1$, то $Q(x)$ существует: $Q(x)=x^2-x+1$. В таких случаях говорят, что $P(x)$ *делится* на $S(x)$.

Определение. *Будем говорить, что многочлен $P(x)$ делится на многочлен $S(x)$, если существует многочлен $Q(x)$, такой, что $S(x)\cdot Q(x)=P(x)$.*

Если $P(x)$ делится на $S(x)$, то будем это записывать так: $P(x)\vdots S(x)$.

Задание 1

Верны ли следующие утверждения: а) $(x^2-4)\vdots(x^2-2)$; б) $x^3\vdots x$; в) $(2x^4+x)\vdots(3x^7+1)$; г) $(x^2+2x+1)\vdots\frac{2}{3}$?

Свойства делимости многочленов

I. *Нуль-многочлен делится на любой многочлен.*

Справедливость этого утверждения следует из очевидного равенства

$$0 \cdot P(x) = 0.$$

II. *Если $P(x) \neq 0$, то $P(x)$ не делится на нуль.*

Убедитесь в этом самостоятельно.

III. *На многочлен нулевой степени делится любой многочлен.*

Действительно, если $P(x)$ — любой многочлен и c — многочлен нулевой степени, то $P(x) = c \cdot \left[\frac{1}{c} P(x)\right]$, откуда следует, что $P(x) \vdots c$.

IV. *Если $P(x) \vdots S(x)$ и $P(x)$, $S(x) \neq 0$, то* ст. $P(x) \geqslant$ ст. $S(x)$.

Доказательство. $P(x) \vdots S(x)$. Значит, существует многочлен $Q(x)$, такой, что $S(x) \cdot Q(x) = P(x)$. Тогда ст. $P(x) =$ ст. $S(x) +$ ст. $Q(x) \geqslant$ ст. $S(x)$.

Задание 2

Сформулируйте утверждение, обратное свойству IV, и выясните, верно оно или нет.

V. *Если $P_1(x) \vdots S(x)$ и $P_2(x) \vdots S(x)$,* то $[P_1(x) \pm P_2(x)] \vdots S(x)$. Докажите самостоятельно.

VI. *Если $P(x) \vdots S(x)$, а $T(x)$ — любой многочлен, то* $[P(x) \cdot T(x)] \vdots S(x)$. Докажите самостоятельно.

VII. *Если $P(x) \vdots S(x)$ и c — многочлен нулевой степени, то $P(x) \vdots [cS(x)]$.* Докажите самостоятельно.

VIII. *Если $P(x) \vdots S(x)$, а $S(x) \vdots T(x)$, то $P(x) \vdots T(x)$.* Докажите самостоятельно.

Упражнения

14. Докажите, что многочлен $P(x) = (3x^2 + 2x - 1) \times (x^7 + 5x^2 + 6) + 3(x^3 + 1) + \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1)$ делится на $(3x + 3)$.

15. Докажите, что многочлен $(x^n - a^n)$ делится на $(x - a)$.

16. Верно ли такое утверждение: если $P(x) \vdots S_1(x)$ и $P(x) \vdots S_2(x)$, то $P(x) \vdots [S_1(x) \cdot S_2(x)]$?

17. Если целое n кратно 3, то $(x^n - 1) \vdots (x^2 + x + 1)$. Доказать.

18. Если $P(x) \vdots S(x)$, то $P^k(x) \vdots S^k(x)$ при всех целых $k \geqslant 0$. Доказать.

19. Если $P(x) \vdots x$, то свободный член многочлена $P(x)$ равен 0. Доказать.

20. Доказать, что $[x^4+5x^3+5x^2-1] \vdots (x+1)$.

21. Доказать, что многочлен x^3+2 не делится на приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами.

§ 3. Алгоритм деления с остатком

Мы уже видели, что делимость многочленов своими свойствами похожа на делимость целых чисел. Сейчас мы обнаружим еще одну важную аналогию.

Как вам известно, при делении целого числа P на целое число $S \neq 0$ мы можем однозначно получить частное и остаток. Иначе говоря, для всякой пары целых чисел P и $S \neq 0$ *существует и притом единственная пара* целых чисел q (частное) и r (остаток), которые удовлетворяют двум соотношениям:

$$1)\ P = Sq + r;\quad 2)\ 0 \leqslant r < |S|.$$

Например, при делении $P=73$ на $S=13$ имеем частное $q=5$, остаток $r=8$, так как: 1) $73=13\cdot5+8$; 2) $0 \leqslant 8 < 13$. При делении $P=19$ на $S=-5$ получаем частное $q=-3$ и остаток $r=4$, так как: 1) $19=(-5)\times\times(-3)+4$; 2) $0 \leqslant 4 < |-5|$. Найдите сами частное и остаток при делении (-27) на (-8). Аналогичный факт имеет место и для многочленов.

Теорема 1 (о делении с остатком). *Если $P(x)$ и $S(x) \neq 0$ — два многочлена, то существует и притом только одна пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, которая удовлетворяет соотношениям:*

1) $P(x) = S(x) \cdot Q(x) + R(x)$;

2) либо ст. $R(x) <$ ст. $S(x)$, либо $R(x) = 0$.

(По аналогии с целыми числами будем называть $Q(x)$ *частным*, а $R(x)$ *остатком*.)

Доказательство. Нам даны два многочлена $P(x)$ и $S(x)$, причем $S(x) \neq 0$, и надо доказать два утверждения: а) существует пара многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющая соотношениям 1) и 2); б) такая пара многочленов единственная. Мы начнем с доказательства единственности.

б) Предположим, что существуют $\{Q_1(x), R_1(x)\}$ и $\{Q_2(x), R_2(x)\}$ две такие пары, т. е.

$$P(x)=S(x)\cdot Q_1(x)+R_1(x), \qquad (1')$$
$$P(x)=S(x)\cdot Q_2(x)+R_2(x), \qquad (1'')$$

и либо ст. $R_1(x) <$ ст. $S(x)$, либо $R_1(x)=0$;
либо ст. $R_2(x) <$ ст. $S(x)$, либо $R_2(x)=0$.

Из равенств (1′) и (1″) получим:

$$R_1(x)-R_2(x)=S(x)\cdot[Q_2(x)-Q_1(x)]. \qquad (*)$$

Это означает, что $[R_1(x)-R_2(x)] \vdots S(x)$, что возможно только в одном из двух случаев: либо $R_1(x)-R_2(x)=0$, либо ст. $[R_1(x)-R_2(x)] \geqslant$ ст. $S(x)$. Последнее, однако, невозможно, так как ст. $R_1(x)$ и $R_2(x)$ меньше ст. $S(x)$. Тогда $R_1(x)-R_2(x)=0$ и $R_1(x)=R_2(x)$.

Теперь равенство (*) дает

$$[Q_2(x)-Q_1(x)]\cdot S(x)=0,$$

откуда $Q_2(x)-Q_1(x)=0$, или $Q_2(x)=Q_1(x)$. Таким образом, пара многочленов $\{Q_1(x), R_1(x)\}$ совпадает с парой многочленов $\{Q_2(x), R_2(x)\}$, что и требовалось доказать.

а) Докажем, что существует пара многочленов $\{Q(x), R(x)\}$, удовлетворяющая соотношениям 1) и 2). Для этого рассмотрим известную вам *схему деления углом*. Пусть

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ — многочлен степени n

и $S(x)=b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\ldots+b_1x+b_0$ — многочлен степени k.

Если $n<k$ или $P(x)=0$, то искомые частное и остаток можно выбрать так: $Q(x)=0$, $R(x)=P(x)$. Действительно, соотношения 1) и 2) в этом случае будут выполнены, так как

1) $P(x)=S(x)\cdot 0+P(x)$,

2) ст. $P(x) <$ ст. $S(x)$ или $P(x)=0$.

Если же $n\geqslant k$, то искомые частное и остаток так просто выбрать уже нельзя (почему?). В этом случае мы и применяем схему деления углом. А именно делим старший член $P(x)$ на старший член $S(x)$; в результате получим одночлен $\frac{a_n}{b_k}x^{n-k}$. Умножаем этот одночлен на $S(x)$ и произведение вычитаем из $P(x)$, получим многочлен

$$P_1(x)=P(x)-\frac{a_n}{b_k}x^{n-k}\cdot S(x).$$

Старшие члены многочленов $P(x)$ и $\frac{a_n}{b_k}x^{n-k}\cdot S(x)$ равны, поэтому ст. $P_1(x)<n$. Обозначим степень многочлена $P_1(x)$ через n_1. Если $n_1<k$ или $P_1(x)=0$, то процесс заканчивается. Если же $n_1\geqslant k$, то с многочленом $P_1(x)$ поступаем аналогично: делим его старший член $a_{n_1}x^{n_1}$ на старший член $S(x)$ и находим многочлен

$$P_2(x)=P_1(x)-\frac{a_{n_1}}{b_k}x^{n_1-k}\cdot S(x).$$

Ст. $P_2(x) <$ ст. $P_1(x)$ и, если ст. $P_2(x) <$ ст. $S(x)$ или $P_2(x)=0$, то процесс заканчивается, если же ст. $P_2(x) \geqslant$ ст. $S(x)$, то получаем аналогично $P_3(x)$ и т. д.

Рассмотрим возникающую цепочку многочленов $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... В этой цепочке каждый многочлен имеет степень, по крайней мере на единицу меньшую степени предыдущего. Поэтому существует в цепочке такой многочлен $P_t(x)$, который или равен нулю, или имеет степень, меньшую, чем $S(x)$.

Кроме того, в этой цепочке каждый многочлен, начиная с $P_1(x)$, связан равенством с предыдущим, а именно:

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_k} x^{n-k} \cdot S(x),$$

$$P_2(x) = P_1(x) - \frac{a_{n_1}}{b_k} x^{n_1-k} \cdot S(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_t(x) = P_{t-1}(x) - \frac{a_{n_{t-1}}}{b_k} x^{n_{t-1}-k} \cdot S(x).$$

Складывая эти равенства и уничтожая имеющуюся в обеих частях сумму $P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_{t-1}(x)$, мы получим:

$$P_t(x) = P(x) - \frac{1}{b_k}(a_n x^{n-k} + a_{n_1} x^{n_1-k} + \dots + a_{n_{t-1}} x^{n_{t-1}-k}) \cdot S(x),$$

или

$$P(x) = \frac{1}{b_k}(a_n x^{n-k} + a_{n_1} x^{n_1-k} + \dots + a_{n_{t-1}} x^{n_{t-1}-k}) \cdot S(x) + P_t(x).$$

Теперь ясно, что в качестве искомых частного и остатка можно принять

$$Q(x) = \frac{1}{b_k}(a_n x^{n-k} + a_{n_1} x^{n_1-k} + \dots + a_{n_{t-1}} x^{n_{t-1}-k}); \quad R(x) = P_t(x),$$

так как либо ст. $P_t(x) <$ ст. $S(x)$, либо $P_t(x) = 0$; и равенство 1) выполнено.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Если ст. $P(x) \geqslant$ ст. $S(x)$, то ст. $Q(x) =$ = ст. $P(x)$ — ст. $S(x)$.

2) В процессе доказательства теоремы мы не только убедились в существовании частного и остатка, но и указали, какие вычисления следует провести, чтобы найти их. Рекомендуемые вычисления представляют собой цепочку однотипных операций, которые в конечное число шагов приводят к нужному результату. Иначе говоря, мы получили *алгоритм*, позволяющий найти частное и остаток, или *алгоритм деления с остатком.*

3) Рассмотрим на примере, как применять алгоритм деления с остатком.

Пример. Найти частное и остаток при делении многочлена

$$P(x)=4x^5+7x^4+6x^3+3x+1$$

на многочлен $S(x)=2x^3+x^2+3$.

Решение.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 4x^5+7x^4+6x^3+3x+1 & 2x^3+x^2+3 \\
\cline{3-3}
\text{1-й шаг}\begin{cases}\dfrac{4x^5}{2x^3}\cdot S(x)= \\ P_1(x)=\end{cases} & \begin{array}{l} -\,4x^5+2x^4+6x^3 \\ \hline \phantom{-4x^5+{}}5x^4+6x^3-6x^2+3x+1\end{array} & 2x^2+\dfrac{5}{2}x+\dfrac{7}{4} \\
\text{2-й шаг}\begin{cases}\dfrac{5x^4}{2x^3}\cdot S(x)= \\ P_2(x)=\end{cases} & \begin{array}{l} -\,5x^4+\dfrac{5}{2}x^3+\dfrac{15}{2}x \\ \hline \phantom{-5x^4+{}}\dfrac{7}{2}x^3-6x^2-\dfrac{9}{2}x+1\end{array} & \\
\text{3-й шаг}\begin{cases}\left(\dfrac{7}{2}x^3:2x^3\right)\cdot S(x)= \\ P_3(x)=\end{cases} & \begin{array}{l} -\,\dfrac{7}{2}x^3+\dfrac{7}{4}x^2\phantom{-\dfrac{9}{2}x}+\dfrac{21}{4} \\ \hline \phantom{-\dfrac{7}{2}x^3}-\dfrac{31}{4}x^2-\dfrac{9}{2}x-\dfrac{17}{4}\end{array} &
\end{array}
$$

Процесс должен быть закончен, так как ст. $P_3(x)<$ $<$ ст. $S(x)$.

Ответ. При делении $P(x)=4x^5+7x^4+6x^3+3x+1$ на $S(x)=2x^3+x^2+3$ возникают частное $Q(x)=2x^2+$ $+\frac{5}{2}x+\frac{7}{4}$ и остаток $R(x)=-\frac{31}{4}x^2-\frac{9}{2}x-\frac{17}{4}$.

В силу доказанной теоремы другого частного и остатка нет.

Разумеется, в приведенной выше записи многое можно опустить. Не обязательно всякий раз отмечать шаг алгоритма и обозначать многочлены возникающей цепочки.

Пример. Найти частное и остаток при делении $x^4+2x^3-2x^2-5x-2$ на x^2+3x+2.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-2x^2-5x-2 & x^2+3x+2 \\
\cline{2-2}
-\,x^4+3x^3+2x^2 & x^2-x-1 \\
\cline{1-1}
-x^3-4x^2-5x-2 & \\
-\,-x^3-3x^2-2x & \\
\cline{1-1}
-x^2-3x-2 & \\
-\,-x^2-3x-2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ответ. Частное равно x^2-x-1, остаток равен 0.

В последнем примере остаток равен нулю, или

$$x^4+2x^3-2x^2-5x-2=(x^2+3x+2)(x^2-x-1),$$

откуда по определению

$$(x^4+2x^3-2x^2-5x-2)\vdots(x^2+3x+2).$$

Теорема 2. *Многочлен $P(x)$ делится на многочлен $S(x)$ тогда и только тогда, когда остаток при делении $P(x)$ на $S(x)$ равен нулю.*

Доказательство. а) Дано: остаток при делении $P(x)$ на $S(x)$ равен нулю. Докажем, что $P(x)\vdots S(x)$.

Обозначим частное через $Q(x)$. Тогда по определению частного и остатка

$$P(x)=S(x)\cdot Q(x)+R(x).$$

Но $R(x)=0$, поэтому $P(x)=S(x)\cdot Q(x)$, откуда следует, что $P(x)\vdots S(x)$.

б) Дано: $P(x)\vdots S(x)$. Тогда существует многочлен $Q(x)$, такой, что $P(x)=Q(x)\cdot S(x)$ или $P(x)=Q(x)\cdot S(x)+0$. Отсюда вытекает, что $Q(x)$ — частное и 0 — остаток. Теорема доказана.

Следствие. Чтобы выяснить, делится ли многочлен $P(x)$ на $S(x)$, можно выполнить деление углом и найти остаток. (Как будет видно из дальнейшего, в некоторых случаях это делать не обязательно.)

Пример. Найти остаток от деления $P(x)=x^{1000}+2x^6+x^3-3$ на $S(x)=x^5-1$.

Решение. Здесь деление углом было бы слишком громоздким. Заметим, что $(x^{1000}-1)\vdots(x^5-1)$. Действительно, по формуле суммы n членов геометрической прогрессии

$$x^{995}+x^{990}+\ldots+x^5+1=\frac{x^{1000}-1}{x^5-1},$$

откуда

$$x^{1000}-1=(x^5-1)(x^{995}+x^{990}+\ldots+x^5+1).$$

Далее,

$$P(x)=(x^{1000}-1)+(2x^6-2x)+x^3+2x-2=(x^5-1)\times$$
$$\times[Q_1(x)+2x]+x^3+2x-2,$$

где $Q_1(x)$ — частное при делении $x^{1000}-1$ на x^5-1. Отсюда следует, что остаток равен x^3+2x-2.

Упражнения

22. Найти частное и остаток при делении для следующих пар многочленов: а) x^2+3x-5, x^3+2; б) $3x^6+2x^4-7$, $x^5-7x^4+3x^2+x$; в) 0, x^3+2x; г) $x^{47}-1$, x^3-1; д) $6x^4+5x^3+15x^2+x-10$, $2x^3+3x^2+7x+5$.

Здесь первым указано делимое, а вторым — делитель.

23. Найти остаток от деления многочлена $x^{10^6}+x^{10^5}+$ $+x^{10^4}+x^{10^3}+x^{10^2}+x^{10}+1$ на многочлен $x^{10}-1$.

24. При каких значениях m многочлен x^6+x^3+m делится на x^3+2?

25. Доказать, что многочлен x^6+x^3+a не делится на многочлен x^3+x+a ни при каких значениях a.

26. При каких значениях a и b (x^3+2x^2+ax+b) $\vdots$ (x^2+x+ab)?

27. При делении многочлена $P(x)$ на многочлен $S(x)$ получается остаток $2x^2-x+1$. Найти остаток от деления $P^2(x)$ на $S(x)$, если ст. $S(x)=5$.

28. При делении $P(x)$ на $S(x)$ получился остаток 2, а при делении $P^2(x)$ на $S^2(x)$ — остаток 4. Какой остаток получится при делении $P(x)$ на $S^2(x)$?

29. Остатки от деления $P_1(x)$ и $P_2(x)$ на $S(x)$ равны соответственно $R_1(x)$ и $R_2(x)$. Найти остаток от деления многочлена $2P_1(x)-3P_2(x)$ на $S(x)$.

30. Доказать, что при делении многочлена на многочлены $S(x)$ и $c\cdot S(x)$ $(c\neq 0)$ получаются одинаковые остатки.

31. Многочлен $P(x)$ при делении на $S(x)$ дает частное $Q(x)$ и остаток $R(x)$. Известно, что при делении $P(x)$ на $x\cdot S(x)$ остаток не изменился. Доказать, что $Q(x)\,\vdots\, x$.

32. Ст. $P(x)=7$, ст. $S(x)=4$. При делении $P(x)$ на $S(x)$ получились частное и остаток, равный x^2+1. Какой остаток получится, если $P(x)$ делить на частное?

33. При делении $P(x)$ на $S(x)$ получены частное $Q(x)=$ $=x^2+1$ и остаток x^3+5x. Какой остаток получится, если $P(x)$ делить на $Q(x)$?

§ 4. Теорема Безу и следствия из нее

В § 1 мы указывали, что многочлен можно рассматривать как функцию.

Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ — данный многочлен и x_0 — число. Подставляя x_0 вместо x, получим число

$$a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\ldots+a_1x_0+a_0,$$

которое назовем *значением многочлена* $P(x)$ *при* $x=x_0$, и обозначим через $P(x_0)$. Иначе говоря, $P(x_0)$ есть значение функции $P(x)$, соответствующее значению аргумента, равному x_0.

Задание 1

1) $P(x)=3x^4-2x+1$. Найти $P(2)$, $P(0)$, $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2) $P(x)=x^3+3x^2-7$. Что больше: $|P(3)|$ или $|P(-4)|$?

Определение. *Число x_0 называется корнем многочлена $P(x)$, если при $x=x_0$ значение многочлена $P(x)$ равно нулю.*

Примеры. 1) Выяснить, является ли число 2 корнем многочлена

$$P(x)=x^3+3x^2-7x+1.$$

Решение. $P(2)=2^3+3\cdot 2^2-7\cdot 2+1=7\neq 0$, т. е. $x_0=2$ не является корнем.

2) Найти все корни многочлена $P(x)=2x^2-5x+2$.

Решение. Решая уравнение $2x^2-5x+2=0$, находим корни данного многочлена: $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Замечание. Обратите внимание на принципиальную разницу между двумя утверждениями: 1) многочлен равен нулю; 2) значение многочлена при $x=x_0$ равно нулю. Эти два утверждения имеют различное содержание. Например, многочлен $P(x)=x^2-4$ не равен нулю, так как среди его коэффициентов есть ненулевые, но значение многочлена $P(x)$ при $x=2$ равно нулю, или $P(x)\neq 0$, но $P(2)=0$.

Рассмотрим пример. Найти остаток при делении $P(x)=2x^2+7x-1$ на двучлен $x-1$. Разделим углом:

$$\begin{array}{r|l}
2x^2+7x-1 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\;2x^2-2x & 2x+9 \\ \cline{1-1}
9x-1 & \\
-\;9x-9 & \\ \cline{1-1}
8 &
\end{array}$$

Остаток 8 является многочленом нулевой степени. Это, конечно, не удивительно, так как делитель есть многочлен первой степени. Но примечательно, что $P(1)=2\cdot 1^2+7\cdot 1-1=8$, т. е. $P(1)$ и остаток при делении $P(x)$ на $(x-1)$ равны. Этот факт не является случайным.

Теорема Безу. *Остаток при делении любого многочлена на двучлен $(x-\alpha)$ равен значению делимого многочлена при $x=\alpha$.*

Доказательство. Обозначим делимый многочлен через $P(x)$. Делитель $x-\alpha$ есть многочлен первой степени, и поэтому остаток — либо многочлен нулевой степени, либо нуль. Во всяком случае, остаток есть константа, которую обозначим через R.

Тогда

$$P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x) + R, \qquad (1)$$

где $Q(x)$ — частное. Равенство (1) верно в алгебраическом смысле. Как мы убедились в § 1, оно верно и в функциональном смысле, т. е. при любом значении аргумента соответствующие значения левой и правой части равны. При $x = \alpha$ мы получим:

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) + R, \text{ или } R = P(\alpha),$$

что и требовалось доказать.

Вопрос. Где в доказательстве использован тот факт, что R — константа?

Примеры. 1) Найти остаток при делении $P(x) = x^4 + 2x^2 + 10x + 1$ на $(x + 2)$.

Решение. По теореме Безу имеем: $R = P(-2) = 1$.

2) Найти остаток при делении $P(x) = x^4 - 2x + 1$ на $(3x - 2)$.

Решение. При делении $P(x)$ на $3x - 2$ и $x - \frac{2}{3}$ остатки одинаковы (см. задачу 9 § 3). Поэтому $R = P\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{11}{81}$.

Следствия из теоремы Безу

I. *Многочлен делится на двучлен $(x - \alpha)$ тогда и только тогда, когда число α является корнем данного многочлена.*

Доказательство. Обозначим данный многочлен через $P(x)$.

а) Если $P(x) \vdots (x - \alpha)$, то остаток $R = 0$. Но остаток $R = P(\alpha)$, т. е. $P(\alpha) = 0$; значит, α — корень многочлена $P(x)$.

б) Если α — корень многочлена $P(x)$, то $P(\alpha) = 0$. По теореме Безу $R = P(\alpha) = 0$ и, значит, $P(x) \vdots (x - \alpha)$. Следствие I доказано.

II. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — различные корни многочлена $P(x)$, то $P(x) \vdots [(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)]$.*

Доказательство. Будем доказывать индукцией по n. При $n = 1$ утверждение справедливо по следствию I.

Предположим, что утверждение доказано для n различных корней и докажем его для $(n+1)$ различных корней.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ — различные корни многочлена $P(x)$. Тогда по предположению индукции $P(x)$ делится на $[(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)]$, т. е. существует многочлен $Q(x)$, такой, что

$$P(x)=[(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)]\cdot Q(x). \qquad (*)$$

Подставляя $x=\alpha_{n+1}$, получим:

$$0=(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\cdot(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(\alpha_{n+1}-\alpha_n)\cdot Q(\alpha_{n+1})$$

В правой части все разности отличны от нуля. Поэтому $Q(\alpha_{n+1})=0$, откуда $Q(x)\,\vdots\,(x-\alpha_{n+1})$, или $Q(x)=(x-\alpha_{n+1})\cdot Q_1(x)$. Теперь равенство $(*)$ дает:

$$P(x)=[(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)\cdot(x-\alpha_{n+1})]\cdot Q_1(x),$$

т. е.

$$P(x)\,\vdots\,[(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)\cdot(x-\alpha_{n+1})].$$

III. *Число различных корней многочлена, отличного от нуля, не более чем его степень.*

Доказательство. Пусть $P(x)\neq 0$ и ст. $P(x)=n$. Предположим, что $P(x)$ имеет $(n+1)$ различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$. Тогда по следствию II $P(x)\,\vdots\,[(x-\alpha_1)\times\times(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_{n+1})]$. Однако это невозможно, так как степень делителя не может быть больше степени делимого.

IV. *Если два многочлена равны в функциональном смысле, то они равны и в алгебраическом смысле.*

Доказательство. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена, которые имеют одинаковые значения при каждом значении аргумента x. Тогда многочлен $S(x)=P(x)-Q(x)$ имеет своим корнем любое число. По следствию III $S(x)=0$, т. е. $P(x)-Q(x)=0$, или $P(x)=Q(x)$. Итак, многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ равны в алгебраическом смысле.

Замечание. В § 1 мы указали на два различных понятия равенства многочленов. Там же мы убедились в том, что если два многочлена равны в алгебраическом смысле, то они равны и в функциональном смысле. Теперь мы доказали обратное утверждение. *Тем самым доказана эквивалентность понятий равенства многочленов в алгебраическом и функциональном смыслах.*

Схема Горнера

Теорема Безу позволяет найти остаток при делении данного многочлена на двучлен $(x-\alpha)$. Однако в некоторых случаях нужно найти и частное. Разумеется, и остаток и частное можно найти делением углом. Оказывается, в случае, когда делитель есть двучлен $(x-\alpha)$, обычную схему деления углом можно значительно упростить в записи. Это правило нахождения частного и остатка при делении многочлена на двучлен $(x-\alpha)$ называется *схемой Горнера*. Оно состоит в следующем.

Старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого. Для получения каждого следующего коэффициента частного нужно соответствующий коэффициент делимого сложить с предыдущим коэффициентом частного, умноженным на число α. Остаток вычисляется аналогично: нужно свободный член делимого сложить со свободным членом частного, умноженным на число α. Эти вычисления обычно записывают с помощью таблицы:

	←——коэффициенты делимого——→					
	a_n	a_{n-1}	...	a_2	a_1	a_0
α	$b_{n-1}(=a_n)$	$b_{n-2}(=a_{n-1}+$ $+\alpha\cdot b_{n-1})$	...	$b_1(=a_2+$ $+\alpha\cdot b_2)$	$b_0(=a_1+$ $+\alpha b_1)$	$R(=a_0+$ $+\alpha b_0)$
	←——коэффициенты частного——→					остаток

Здесь в первой строчке стоят коэффициенты делимого многочлена. Под ними во второй строчке стоят коэффициенты частного (в скобках указано, как они вычисляются). Под свободным членом делимого стоит остаток.

Примеры. 1) Найти частное и остаток при делении $2x^4+3x^3-5x^2-7x+2$ на $(x-3)$.

Решение.

	2	3	−5	−7	2
3	2	9	22	59	179

Ответ. Частное $Q(x)=2x^3+9x^2+22x+59$, остаток $R=179$.

2) Найти частное и остаток при делении x^5-3x^2+7x+2 на $x+2$.

Решение.

	1	0	0	−3	7	2
−2	1	−2	4	−11	29	−56

Ответ. Частное $Q(x)=x^4-2x^3+4x^2-11x+29$, остаток $R=-56$.

3) При каких значениях a и b многочлен $P(x)=x^3+ax^2+bx+ab$ от деления на $(x-2)$ дает остаток, равный 15, а от деления на $(x+1)$ — остаток, равный нулю?

Решение. По теореме Безу $P(2)=15$, $P(-1)=0$, или

$$\begin{cases} 8+4a+2b+ab=15, \\ -1+a-b+ab=0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 4a+2b+ab=7, \\ a-b+ab=1. \end{cases}$$

Вычитая, получим: $3a+3b=6$, или $a=2-b$. Подставляем это значение a во второе уравнение, получим: $b^2=1$, или $b_{1,2}=\pm 1$.

Ответ.

$$\begin{cases} a_1=1, \\ b_1=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2=3, \\ b_2=-1. \end{cases}$$

4) Многочлен $P(x)$ при делении на $(x-3)$ дает остаток 5, а при делении на $(x-1)$ — остаток 7. Какой остаток дает $P(x)$ при делении на $(x-3)\cdot(x-1)$?

Решение. Делитель $(x-3)(x-1)$ имеет степень 2. Поэтому остаток есть многочлен степени не выше первой, т. е. $R(x)=ax+b$, и наша цель — найти a и b.

Обозначим частное через $Q(x)$. Тогда

$$P(x)=[(x-3)(x-1)]\cdot Q(x)+(ax+b).$$

При $x=1$ получим: $P(1)=a+b$, но по условию и в силу теоремы Безу $P(1)=7$, поэтому $a+b=7$. Аналогично при $x=3$ мы получим: $3a+b=5$. Нам остается решить систему

$$\begin{cases} 3a+b=5, \\ a+b=7, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a=-1, \\ b=8. \end{cases}$$

Ответ. $R(x)=-x+8$.

5) Доказать, что функция $f(x)=\sin x$ не является многочленом.

Решение. а) $f(x)$ не может быть многочленом, отличным от нуля, так как эта функция имеет бесчисленное множество различных корней: $\pi \cdot n \, (n=0 \pm 1 \pm 2 \ldots)$;

б) $f(x)$ не может быть многочленом, равным нулю, так как не все значения $f(x)$ равны нулю.

6) Найти многочлен степени не выше второй, график которого проходит через три данные точки: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (x_1, x_2, x_3 различны). Доказать, что он единственный.

Решение. а) Докажем, что многочлен

$$P(x)=y_1 \cdot \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+ \\ +y_3 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \qquad (1)$$

является искомым.

Действительно, подставляя $x=x_1$, находим: $P(x_1)=$ $=y_1 \cdot 1+y_2 \cdot 0+y_3 \cdot 0=y_1$. Аналогично $P(x_2)=y_2$, $P(x_3)=$ $=y_3$. Таким образом, график многочлена $P(x)$ проходит через данные точки. Кроме того, из выражения (1) видно, что ст. $P(x) \leqslant 2$.

б) Докажем, что $P(x)$ — единственный многочлен, степени не выше второй, график которого проходит через данные точки.

Допустим противное. Предположим, что существует многочлен $Q(x) \neq P(x)$, такой, что ст. $Q(x) \leqslant 2$ и $Q(x_1)=$ $=y_1$, $Q(x_2)=y_2$, $Q(x_3)=y_3$. Рассмотрим многочлен $S(x)=$ $=P(x)-Q(x)$. Тогда ст. $S(x) \leqslant 2$. Кроме того, $S(x_1)=$ $=P(x_1)-Q(x_1)=0$, т. е. x_1 — корень многочлена $S(x)$. Аналогично x_2, x_3 — корни многочлена $S(x)$. Мы получаем, что многочлен $S(x)$ имеет три различных корня, хотя его степень не выше второй. Это противоречит следствию III (стр. 17).

Таким образом, наше предположение неверно, т. е. $P(x)$ — единственный многочлен, удовлетворяющий условиям задачи.

Замечание. Принцип построения многочлена $P(x)$ по формуле (1) весьма прост. Надо только запомнить, как строится одно слагаемое в сумме (1), так как остальные два слагаемых аналогичны.

7) Найти квадратный трехчлен, график которого проходит через точки (1, 2), (—3, 22), (2, 7).

Решение. Согласно формуле (1) (см предыдущую задачу) искомый многочлен имеет вид:

$$P(x)=2\cdot\frac{(x+3)(x-2)}{(1+3)(1-2)}+22\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(-3-1)(-3-2)}+$$
$$+7\cdot\frac{(x-1)(x+3)}{(2-1)(2+3)},$$

откуда, приводя к общему знаменателю и раскрывая скобки, находим:

$$P(x)=2x^2-x+1.$$

В силу задачи 6 найденный многочлен единственный.

Замечание. 1) Задачу 6 можно обобщить. Поставим вопрос: сколько существует многочленов степени не выше третьей, графики которых проходят через 4 данные точки: $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$, $(x_4,\ y_4)$, (x_1, x_2, x_3, x_4 различны), и как найти такие многочлены?

Оказывается, как и в задаче № 6, такой многочлен единственный и составляется он по формуле, аналогичной формуле (1). А именно искомый многочлен имеет вид:

$$y_1\cdot\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}+y_2\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+$$
$$+y_3\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}+y_4\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}.$$

Чтобы это доказать, достаточно провести такие же рассуждения, как и в задаче 6.

2) Вообще если $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, ..., $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ —$(n+1)$ данных точек (все x_i различны), то существует единственный многочлен, степени не выше n-й, график которого проходит через данные $(n+1)$ точек. Этот многочлен имеет вид:

$$y_1\cdot\frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_{n+1})}+y_2\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_{n+1})}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_{n+1})}+$$
$$+\ldots+y_{n+1}\cdot\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)\ldots(x_{n+1}-x_n)}$$

Многочлены, составленные по этой формуле, называют интерполяционными полиномами Лагранжа.

Упражнения

34. Найти частное и остаток при делении $2x^3+x^2-2$ на $x+4$.

35. Найти остаток при делении $x^{100}+2x^{99}-3x^3+2x+5$ на x^2+x-2.

36. При делении $P(x)$ на $(x-1)$, $(x-2)$, $(x+1)$ остатки соответственно равны: 3, 15, 0. Найти остаток при делении $P(x)$ на x^3-2x^2-x+2.

37. Доказать, что $(x-2)^{100}+(x-1)^{50}-1$ делится на x^2-3x+2.

38. При n, не кратном 3, $(x^{2n}+x^n+1):(x^2+x+1)$. Доказать.

39. На координатной плоскости даны 4 точки: $(-2, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$. Найти многочлен степени не выше третьей, график которого проходит через эти точки. Доказать, что этот многочлен единственный.

40. Если графики двух многочленов степени n имеют $(n+1)$ общих точек, то многочлены равны. Доказать.

41. Доказать тождество:

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}=1.$$

42. Если при любом рациональном значении аргумента значение многочлена является рациональным числом, то все коэффициенты многочлена рациональны. Доказать.

43. График многочлена степени $n\geqslant 1$ пересекает любую прямую не более чем в n точках. Доказать.

44. Доказать, что не существует квадратного трехчлена, который при любом иррациональном значении аргумента принимает рациональные значения.

45. Приведенный квадратный трехчлен обладает тем свойством, что при любой перестановке его коэффициентов получается квадратный трехчлен с теми же корнями, что и исходный. Найти исходный квадратный трехчлен.

46. Приведенный квадратный трехчлен обладает тем свойством, что при любой перестановке его коэффициентов получается квадратный трехчлен, имеющий хотя бы один общий корень с исходным. Найти исходный квадратный трехчлен.

47. Какие из указанных функций являются многочленами:

а) $f(x)=2^x$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=\sin(\arcsin x)$; г) $f(x)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

§ 5. Теорема Виета

В этом параграфе мы установим связь между корнями многочлена и его коэффициентами. Эта связь вам известна для приведенного квадратного трехчлена из теоремы Виета.

Определение. *Многочлен называется приведенным, если его старший коэффициент равен единице.*

Лемма. *Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — корни приведенного многочлена $P(x)$ степени n, то*

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Доказательство. Мы ограничимся случаем, когда все корни $x_1, x_2, \dots, x_n$ различны. По следствию II § 4

$$P(x) \vdots [(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)].$$

В данном случае степени делимого и делителя равны, и поэтому частное — константа. Обозначим ее через c. Тогда

$$P(x)=c[(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)]. \qquad (*)$$

Старший коэффициент многочлена в правой части равен c, а у многочлена $P(x)$ он равен 1. Поэтому $c=1$, и равенство (*) принимает вид:

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$

Лемма доказана.

Задание

Составьте приведенный многочлен по его корням:

а) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$; б) $x_1=x_2=\sqrt{2}$, $x_3=x_4=-\sqrt{2}$.

Теорема Виета для приведенного квадратного трехчлена. *В приведенном квадратном трехчлене второй коэффициент равен сумме корней, умноженной на (-1), свободный член равен произведению корней.*

Доказательство. Пусть $P(x)=x^2+px+q$ — приведенный квадратный трехчлен и x_1, x_2 — его корни. Тогда по лемме $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)$, или $x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2$, откуда $P=-(x_1+x_2)$, $q=x_1x_2$.

Теорема доказана.

Теорема Виета для приведенного кубического многочлена. *В приведенном кубическом многочлене второй коэффициент равен сумме корней, умноженной на* (-1), *третий коэффициент равен сумме всех произведений корней по два, свободный член равен произведению всех корней, умноженному на* (-1).

Доказательство. Пусть $P(x)=x^3+px^2+qx+r$ — приведенный кубический многочлен и x_1, x_2, x_3 — его корни. По лемме $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, или $x^3+px^2+qx+r=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3$. Отсюда получим: $p=-(x_1+x_2+x_3)$, $q=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$, $r=-x_1x_2x_3$, что и требовалось доказать.

Замечания. 1) Данное здесь доказательство не требует непосредственного выражения корней многочлена через его коэффициенты. Этим оно отличается от принятого в школе доказательства теоремы Виета для приведенного квадратного трехчлена.

2) Мы видим, что метод доказательства теоремы Виета для многочленов второй и третьей степени один и тот же. Эти же рассуждения позволяют установить зависимость между корнями и коэффициентами приведенного многочлена любой степени. При этом получаем: *у приведенного многочлена любой степени второй коэффициент равен сумме всех корней, умноженной на* (-1), *третий коэффициент равен сумме произведений корней по два, четвертый коэффициент равен сумме произведений корней по три, умноженной на* (-1), *и так далее, свободный член равен произведению всех корней, если степень четная, и произведению всех корней, умноженному на* (-1), *если степень многочлена нечетная.*

3) Строго говоря, теорема Виета сформулирована нами неточно. Дело в том, что мы не знаем, у всякого ли многочлена есть корни и равно ли их количество степени многочлена. Оказывается, в множестве комплексных чисел любой многочлен степени n имеет точно n (не обязательно различных) корней. Имея это в виду, можно принять данную нами формулировку теоремы Виета.

Примеры. 1) x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $P(x)=3x^3+5x^2+7x+4$. Найти: а) $x_1+x_2+x_3$; б) $x_1x_2x_3$; в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

Решение. Данный многочлен не является приведенным. Однако если рассмотреть многочлен $P_1(x)=\frac{1}{3}P(x)=x^3+\frac{5}{3}x^2+\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$, то он уже приведенный и имеет те же корни, что и многочлен $P(x)$ (почему?).

По теореме Виета получим: а) $x_1+x_2+x_3=-\frac{5}{3}$; б) $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{4}{3}$; в) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=$ $=\frac{7}{3}:\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{7}{4}$.

2) Корни многочлена $P(x)=x^2-7x+17$ равны x_1 и x_2. Составить приведенный многочлен наименьшей степени, корни которого равны:

$$y_1=\frac{x_1}{x_2^2},\quad y_2=\frac{x_2}{x_1^2}$$

Решение. Свободный член многочлена $P(x)$ равен 17, поэтому $x_1\neq 0$ и $x_2\neq 0$, следовательно, y_1 и y_2 существуют (в множестве комплексных чисел). Искомый многочлен имеет степень 2, так как у него два корня. Будем искать его в виде $Q(x)=x^2+px+q$. Наша цель — найти p и q.

По теореме Виета

$$p=-(y_1+y_2)=-\frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_2)^2}=-\frac{x_1^3+x_2^3}{17^2},$$

$$q=y_1\cdot y_2=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{17}.$$

Осталось найти $x_1^3+x_2^3$:

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=$$
$$=(x_1+x_2)[(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)-3x_1x_2]=7(7^2-3\cdot 17)=-14.$$

Теперь ясно, что $p=\frac{14}{289}$, $q=\frac{1}{17}$ и $Q(x)=x^2+\frac{14}{289}x+\frac{1}{17}$.

3) Найти сумму квадратов корней многочлена $P(x)=$ $=x^3+3x^2-7x+1$.

Решение. По теореме Виета

$$x_1+x_2+x_3=-3,\quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-7,\quad x_1x_2x_3=-1.$$

Заметим, что

$$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1,$$

откуда

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=$$
$$=(-3)^2-2\cdot(-7)=23.$$

4) Доказать, что не все корни многочлена x^3+3x-1 являются действительными числами.

Решение. В силу предыдущего примера $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$. По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=3$, откуда $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-6$, что невозможно, если все корни x_1, x_2, x_3 действительны.

5) Корни многочлена

$$P(x)=x^3+6x^2+5x+r$$

образуют арифметическую прогрессию. Найти $P(x)$ и его корни.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3 корни многочлена $P(x)$. По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=-6$. По условию $x_1+x_3=2x_2$. Поэтому $3x_2=-6$ и $x_2=-2$. Мы нашли один из корней многочлена $P(x)$, он равен (-2). Тогда $P(-2)=0$, или $-8+24-10+r=0$, откуда $r=-6$. Следовательно,

$$P(x)=x^3+6x^2+5x-6.$$

По теореме Безу $P(x)\,\vdots\,(x+2)$. Найдем частное по схеме Горнера.

	1	6	5	-6
-2	1	4	-3	0

Итак, $P(x)=(x+2)(x^2+4x-3)$. Решая квадратное уравнение $x^2+4x-3=0$, находим остальные корни многочлена $P(x)$: $x_1=-2+\sqrt{7}$, $x_3=-2-\sqrt{7}$.

Ответ. $P(x)=x^3+6x^2+5x-6$, $x_1=-2+\sqrt{7}$, $x_2=-2$, $x_3=-2-\sqrt{7}$.

6) x_1, x_2, x_3 — корни многочлена x^3+2x^2+x-3. Найти $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

Решение. Как и в примере 3, нам достаточно выразить искомую сумму кубов через сумму корней, сумму попарных произведений корней и произведение корней, так как эти выражения нам известны по теореме Виета: $x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$, $x_1x_2x_3=3$.

Заметим, что

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=$$
$$=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_3x_1^2,$$

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=$$
$$=x_1^2x_2+x_2^2x_1+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3^2x_1+x_1x_3^2+3x_1x_2x_3.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)=$$
$$=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3.$$

Но $\quad x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$

(см. пример 3). Подставляя это в предыдущее равенство и разрешая его относительно $x_1^3+x_2^3+x_3^3$, получим:

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-$$
$$-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+3x_1x_2x_3.$$

Отсюда $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(-2)^3-3\cdot(-2)\cdot 1+3\cdot 3=7.$

Ответ. $x_1^3+x_2^3+x_3^3=7.$

7) Решить систему

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x^4+y^4=17. \end{cases}$$

Решение. Всякая пара чисел x и y, которая является решением данной системы, есть также пара корней некоторого приведенного квадратного трехчлена $P(t)=t^2+pt+q$. Будем искать этот квадратный трехчлен, т. е. его коэффициенты p и q.

По теореме Виета $p=-(x+y)$, $q=xy$. Выразим левые части уравнений данной системы через p и q: $x+y=-p$, $x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2q^2=$ $=[(x+y)^2-2xy]^2-2q^2=(p^2-2q)^2-2q^2$. Подставляя эти выражения в исходную систему, мы получаем систему относительно p и q:

$$\begin{cases} -p=3, \\ (p^2-2q)^2-2q^2=17. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $p=-3$ и подставляем это значение p во второе уравнение. Получаем квадратное уравнение $q^2-18q+32=0$, откуда $q_1=2$, $q_2=16$. Таким образом, мы получили два квадратных трехчлена t^2-3t+2 и $t^2-3t+16$. Пара корней каждого из них и есть решение нашей системы (с точностью до порядка).

Находим корни первого квадратного трехчлена $t_1=2$, $t_2=1$. Они дают два решения исходной системы:

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=2. \end{cases}$$

Второй квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Ответ.

$$\begin{cases} x_1=2, \\ y_1=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=2. \end{cases}$$

Замечание. Обратим внимание на одно важное свойство исходной системы. Если мы в исходной системе сделаем перестановку неизвестных, т. е. вместо x напишем y, а вместо y напишем x, то каждое уравнение системы не изменится. Будем называть такие системы *симметрическими*. Метод, которым мы решили последний пример, годится только для симметрических систем.

8) Решить систему

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

Решение. Данная система симметрическая, так как при любой перестановке неизвестных каждое уравнение системы не изменится. Применим для решения этой системы метод, изложенный в предыдущей задаче.

Будем рассматривать три неизвестных числа x, y, z как корни некоторого приведенного кубического многочлена t^3+pt^2+qt+r и попытаемся найти этот многочлен, т. е. найдем p, q и r.

По теореме Виета $x+y+z=-p$, $xy+yz+zx=q$, $xyz=-r$. Выразим уравнения данной системы через p, q и r. В силу задачи 3 и задачи 6 мы имеем:

$$x^2+y^2+z^2=p^2-2q, \quad x^3+y^3+z^3=-p^3+3pq-3r.$$

Подставляя эти выражения в исходную систему, получим:

$$\begin{cases} -p=1, \\ p^2-2q=1, \\ -p^3+3pq-3r=1, \end{cases}$$

откуда легко находим: $p=-1$, $q=0$, $r=0$. Следовательно, искомый многочлен равен t^3-t^2. Находим его корни:

$$t^3-t^2=0,\quad t^2(t-1)=0,\quad t_{1,2}=0,\quad t_3=1.$$

Ответ.

$$\begin{cases} x_1=1,\\ y_1=z_1=0;\end{cases}\quad \begin{cases} x_2=z_2=0,\\ y_2=1;\end{cases}\quad \begin{cases} x_3=y_3=0,\\ z_3=1.\end{cases}$$

Упражнения

48. x_1, x_2, x_3 — корни многочлена x^3-2x-5. Найти приведенный многочлен, у которого корни равны: $y_1=x_2\cdot x_3$, $y_2=x_3x_1$, $y_3=x_1x_2$.

49. x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $-2x^3+x^2+2x+3$. Найти приведенный многочлен, у которого корни равны:

$$y_1=\frac{x_1}{x_2x_3},\quad y_2=\frac{x_2}{x_1x_3},\quad y_3=\frac{x_3}{x_1x_2}.$$

50. Вычислить $x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2$, если x_1, x_2, x_3 — корни многочлена x^3-x+3.

51. Вычислить $x_1^2x_2+x_2^2x_1+x_1^2x_3+x_3^2x_1+x_2^2x_3+x_3^2x_2$, если x_1, x_2, x_3 — корни многочлена x^3+3x^2-1.

52. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+4xy=-11,\\ x+y-2xy=13,\end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2+x^2y^2+xy(x+y+2)=3,\\ \dfrac{x+y}{xy}+x-\dfrac{x^2}{x+y}=-\dfrac{5}{2},\end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=4,\\ xy+xz+yz=5,\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{2},\end{cases}$ г) $\begin{cases} xy-yz+xz=0,\\ x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=24,\\ -\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz}=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

53. Корни многочлена $x^3-18x^2+qx+24$ образуют арифметическую прогрессию. Найти многочлен и его корни.

54. Один из корней многочлена $P(x)=x^3-7x^2+14x+r$ в два раза больше другого. Найти $P(x)$ и его корни.

55. Многочлен $x^3-10x^2+27x+r$ имеет три действительных корня, из которых один в три раза больше, чем разность двух других. Найти многочлен и его корни.

56. Доказать, что не все корни многочлена $x^3+7x^2+ +25x+1$ действительны.

57. Если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то среди чисел a, b, c два противоположных. Доказать.

58. Решить уравнение в множестве действительных чисел:

$$\sqrt[4]{65+x}+\sqrt[4]{17-x}=4.$$

59. Доказать, что многочлен x^3-3x^2+4x+9 не имеет трех действительных корней.

60. При каких a и b система

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a, \\ x^3+y^3=b \end{cases}$$

имеет точно одно решение?

61*. Если x_1, x_2, x_3 положительны, то

а) $9x_1x_2x_3 \leqslant (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$;

б) $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) \leqslant (x_1+x_2+x_3)^2$.

Доказать.

62*. Многочлен $x^3-6x^2+12x+r$ имеет три положительных корня. Найти многочлен.

§ 6. Рациональные корни многочленов

В этом параграфе мы укажем метод, позволяющий находить рациональные корни (т. е. целые или дробные) многочлена с рациональными коэффициентами, если такие корни есть.

Теорема 1. *Если целое число l является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то свободный член многочлена делится на l.*

Доказательство. Пусть

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

многочлен с целыми коэффициентами и целое число

l — корень $P(x)$. Тогда $P(l)=0$, или

$$a_n l^n + a_{n-1} l^{n-1} + \ldots + a_1 l + a_0 = 0.$$

Отсюда

$$a_0 = l(-a^n l^{n-1} - a_{n-1} l^{n-2} - \ldots - a_2 l - a_1).$$

В скобках стоит целое число. Поэтому целое число a_0 делится на l.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Не следует думать, что всякий многочлен с целыми коэффициентами имеет целые корни. Например, многочлен $P(x)=x^3+7x^2+1$ не имеет целых корней. Действительно, по теореме 1 ими могли бы быть только 1 или (-1), но $P(1)=9$, а $P(-1)=7$. Таким образом, теорема 1 позволяет найти целые корни многочлена с целыми коэффициентами или доказать, что их нет.

2) С помощью теоремы 1 можно найти целые корни многочлена $P(x)$ и в том случае, если коэффициенты его рациональны. Для этого достаточно умножить многочлен $P(x)$ на наименьшее общее кратное знаменателей всех коэффициентов. Тогда получим многочлен $P_1(x)$ с целыми коэффициентами и теми же корнями, что и $P(x)$. Применив к многочлену $P_1(x)$ теорему 1, мы найдем целые корни многочлена $P_1(x)$, а следовательно, и многочлена $P(x)$.

Примеры. 1) Решить уравнение $x^3-5x^2-x+21=0$.

Решение. Многочлен x^3-5x^2-x+21 имеет целые коэффициенты. По теореме 1 его целые корни находятся среди чисел ± 1, ± 3, ± 7, ± 21, которые являются делителями свободного члена. Проверкой убеждаемся в том, что 3 является корнем. По теореме Безу многочлен делится на $(x-3)$. Находим частное по схеме Горнера:

	1	−5	−1	21
3	1	−2	−7	0

Таким образом,

$$x^3-5x^2-x+21=(x-3)(x^2-2x-7).$$

Ответ. $x_1=3$, $x_2=1+2\sqrt{2}$, $x_3=1-2\sqrt{2}$.

2) Найти корни многочлена

$$P(x)=6x^4+7x^3-3x^2-3x+1.$$

Решение. Ищем целые корни среди делителей свободного члена: ± 1. Подходит (-1). Делим $P(x)$ на $(x+1)$:

	6	7	−3	−3	1
−1	6	1	−4	1	0

$P(x) = (x+1)(6x^3 + x^2 - 4x + 1)$.

Ищем целые корни кубического многочлена среди делителей его свободного члена ± 1. Подходит (-1). Делим $6x^3 + x^2 - 4x + 1$ на $(x+1)$.

	6	1	−4	1
−1	6	−5	1	0

$P(x) = (x+1)^2(6x^2 - 5x + 1)$.

Находим корни квадратного трехчлена $6x^2 - 5x + 1$:

$x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{3}$.

Ответ $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{3}$.

3) Найти целые корни многочлена $P(x) = 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}$.

Решение. Не все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые. Поэтому теорему 1 применить нельзя. Рассмотрим

$$P_1(x) = 6 \cdot P(x) = 12x^3 + 4x^2 - 3x + 5.$$

Корни многочленов $P_1(x)$ и $P(x)$ совпадают. Ищем целые корни многочлена $P_1(x)$ среди делителей его свободного члена: ± 1, ± 5.

$P_1(1) = 18$, $P_1(-1) = 0$, $P_1(5) = 1590$, $P_1(-5) = -1380$.

Ответ. $P(x)$ имеет один целый корень: -1.

Теорема 1 позволяет найти все целые корни многочлена с рациональными коэффициентами, если такие корни есть. Оказывается, для многочленов с рациональными коэффициентами можно найти и дробные корни или доказать, что их нет.

Теорема 2. *Приведенный многочлен с целыми коэффициентами не имеет дробных корней.*

Доказательство. Пусть

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

приведенный многочлен с целыми коэффициентами. Предположим, что $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь со знаменателем $q > 1$, которая является корнем многочлена $P(x)$. Тогда $P\left(\frac{p}{q}\right)=0$, или

$$\frac{p^n}{q^n}+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{p}{q}+a_0=0.$$

Отсюда

$$\frac{p^n}{q}=-a_{n-1}p^{n-1}-a_{n-2}p^{n-2}q-\ldots-a_1pq^{n-2}-a_0q^{n-1}.$$

Но это невозможно, так как в правой части стоит целое число, а в левой — дробное.

Теорема доказана.

Примеры. 1) Доказать, что многочлен $P(x)=x^3+2x+5$ не имеет рациональных корней.

Решение. $P(x)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами, поэтому $P(x)$ не имеет дробных рациональных корней. По теореме 1 целые корни, если они есть, находятся среди чисел ± 1, ± 5. Но $P(1)=8$, $P(-1)=2$, $P(5)=140$, $P(-5)=-130$. Итак, целых корней многочлен $P(x)$ тоже не имеет. Значит, $P(x)$ не имеет рациональных корней.

2) Найти корни многочлена $P(x)=2x^3-5x^2-x+1$.

Решение. Попытаемся найти целые корни. $P(1)=3$, $P(-1)=-5$. Целых корней нет. Многочлен $P(x)$ не является приведенным, поэтому он может иметь дробные рациональные корни. Найдем их.

Умножим $P(x)$ на 4 (с той целью, чтобы старший коэффициент был кубом целого числа). Получим $P_1(x)=8x^3-20x^2-4x+4$. Ясно, что многочлен $P_1(x)$ имеет те же корни, что и данный многочлен. Далее сделаем подстановку: $2x=t$. Получим многочлен $P_2(t)=t^3-5t^2-2t+4$. По построению многочлена $P_2(t)$, видно, что если x_1 — рациональный корень многочлена $P_1(x)$, то $t_1=2x_1$ — рациональный корень многочлена $P_2(t)$, и наоборот, если t_1 — рациональный корень многочлена $P_2(t)$, то $x_1=\frac{t_1}{2}$ — рациональный корень многочлена $P_1(x)$. Итак, зная рациональные корни многочлена $P_2(t)$, мы легко найдем рациональные корни многочлена $P_1(x)$.

По теореме 2 все рациональные корни многочлена $P_2(t)$ должны быть целыми. Если они есть, то найти их можно среди делителей свободного члена: ± 1, ± 2, ± 4. В данном случае подходит $t_1=-1$. Тогда $x_1=-\frac{1}{2}$ — корень многочлена $P_1(x)$, а значит, и многочлена $P(x)$.

По теореме Безу $P(x) \vdots \left(x+\frac{1}{2}\right)$. Находим частное:

	2	-5	-1	1
$-\frac{1}{2}$	2	-6	2	0

$P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+2)$.

Находим остальные корни: $2x^2-6x+2=0$, $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ. $x_1=-\frac{1}{2}$; $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Из решения примера 2 можно усмотреть общую схему отыскания рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами.

Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если $a_n=1$, то дробных корней нет, а целые корни (если они есть) можно найти среди делителей a_0.

Если $a_n \neq 1$, то рассмотрим многочлен

$$P_1(x)=a_n^{n-1}\cdot P(x)=a_n^nx^n+a_n^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1}\cdot a_1x+a_n^{n-1}\cdot a_0,$$

имеющий те же корни, что и многочлен $P(x)$.

Сделав подстановку $a_nx=t$, мы получим многочлен

$$P_2(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+a_{n-2}a_nt^{n-2}+\ldots+a_1a_n^{n-2}t+a_0a_n^{n-1}.$$

Многочлен $P_2(t)$ имеет столько же рациональных корней, сколько $P_1(x)$, а значит, и $P(x)$ (докажите это). Но $P_2(t)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами, а потому все его рациональные корни — целые, и их можно найти среди делителей свободного члена $a_0a_n^{n-1}$.

Зная все целые корни многочлена $P_2(t)$, находим все рациональные корни многочлена $P(x)$ из соотношения: $a_nx=t$.

Пример. Доказать, что $\sin 10°$ — иррациональное число.

Решение. По известным формулам тригонометрии $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, откуда $\sin 30°=3\sin 10°-4\sin^3 10°$, или $3\sin 10°-4\sin^3 10°=\frac{1}{2}$, или $8\sin^3 10°-6\sin 10°+1=0$. Таким образом, $\sin 10°$ — корень многочлена

$P(x)=8x^3-6x+1$. Задача будет решена, если мы докажем, что $P(x)$ не имеет рациональных корней.

Сделаем подстановку: $2x=t$. Тогда получим многочлен $Q(t)=t^3-3t+1$. Этот многочлен не имеет дробных рациональных корней; целых корней у него тоже нет ($Q(1)=-1$, $Q(-1)=3$). Таким образом, многочлен $Q(t)$, а следовательно, и многочлен $P(x)$ не имеют рациональных корней.

Упражнения

63. Доказать, что многочлен $3x^3+x-2$ не имеет рациональных корней.

64. Доказать, что $\cos 20°$ — иррациональное число.

65. Решить уравнения:

а) $2x^4+x^3-15x^2-17x+3=0$;

б) $25x^4+15x^3+16x^2-9x+1=0$.

66. Разложить на множители многочлен $8x^5-4x^4+$ $+2x^3+7x^2+5x-1$.

67. Существуют ли два дробных числа, сумма и произведение которых — целые числа?

68. Найти все тройки рациональных чисел, у которых сумма и сумма квадратов — нечетные целые числа, а произведение равно 3.

69. Решить уравнение $2\sqrt{2}x^3-5\sqrt{2}x+2=0$.

70. Многочлен $P(x)$ имеет целые коэффициенты. Один из дробных корней многочлена $P(x)$ равен $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Доказать, что свободный член многочлена $P(x)$ делится на p, а старший коэффициент делится на q $\left(\frac{p}{q}\text{ — несократимая дробь}\right)$.

71. Решить неравенство $\frac{16x-7}{x^2+x+1}<3x$.

72. Существуют ли две рациональные дроби, сумма и сумма квадратов которых — целые числа?

§ 7. Кратные корни

Определение. *Число α называется корнем кратности k данного многочлена, если данный многочлен делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$ (k — натуральное число).*

Если кратность корня α равна 1, то α называется *простым* корнем. Если кратность корня α больше 1, то α называется *кратным* корнем.

Примеры. 1) Доказать, что $x=2$ — кратный корень многочлена $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+16x-12$. Найти кратность этого корня.

Решение. $P(2)=16-24-12+32-12=0$. Таким образом, 2 — корень многочлена $P(x)$ и $P(x) \vdots (x-2)$. Найдем частное $Q(x)$.

	1	−3	−3	16	−12
2	1	−1	−5	6	0

$Q(x)=x^3-x^2-5x+6$, $P(x)=(x-2)\cdot Q(x)$.

Выясним, делится ли $P(x)$ на $(x-2)^2$. Это зависит от того, делится ли многочлен $Q(x)$ на $(x-2)$.

$$Q(2)=8-4-10+6=0.$$

По теореме Безу $Q(x) \vdots (x-2)$. Находим частное $Q_1(x)$

	1	−1	−5	6
2	1	1	−3	0

откуда $Q_1(x)=x^2+x-3$ и $P(x)=(x-2)^2\cdot Q_1(x)$. Мы видим, что $P(x) \vdots (x-2)^2$. Выясним, делится ли $P(x)$ на $(x-2)^3$, т. е. делится ли $Q_1(x)$ на $(x-2)$.

$$Q_1(2)=4+2-3\neq 0.$$

По теореме Безу $Q_1(x)$ не делится на $(x-2)$, а значит, $P(x)$ не делится на $(x-2)^3$. По определению число 2 — корень второй кратности многочлена $P(x)$.

Найдем остальные корни многочлена $P(x)$. Для этого решим квадратное уравнение $x^2+x-3=0$, откуда находим: $x_3=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

Итак, многочлен $P(x)$ имеет кратный корень $x_1=x_2=2$ и два простых корня: $x_3=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

2) Найти корни и их кратности для многочлена

$$P(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)^4\cdot(x+2)^5\cdot(2x-1).$$

3) Найти значения a, при которых многочлен

$$P(x)=x^3+ax^2+ax+1$$

имеет число (−1) корнем второй кратности.

Решение. $P(-1)=-1+a-a+1=0$, следовательно, (-1) — корень многочлена $P(x)$ при всех a. Поэтому $P(x) \vdots (x+1)$ при всех значениях a. Найдем частное $Q(x)$

	1	a	a	1
-1	1	$a-1$	1	0

$$Q(x)=x^2+(a-1)x+1, \quad P(x)=(x+1)\cdot Q(x).$$

Выясним, при каких значениях a имеет место: $P(x) \vdots (x+1)^2$ или $Q(x) \vdots (x+1)$. Чтобы $Q(x) \vdots (x+1)$, необходимо и достаточно, чтобы $Q(-1)=3-a=0$, или $a=3$. Итак, $P(x) \vdots (x+1)^2$ тогда и только тогда, когда $a=3$ и $P(x)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$. Но в этом случае многочлен $P(x)$ делится не только на $(x+1)^2$, но и на $(x+1)^3$.

Ответ. Ни при каком значении a число (-1) не является корнем кратности 2 многочлена $P(x)$. (При $a \neq 3$ (-1) — простой корень многочлена $P(x)$, а при $a=3$ (-1) — корень кратности 3.)

Упражнения

73. Квадратный трехчлен имеет кратный корень. Найти дискриминант трехчлена.

74. Число α — корень кратности k многочлена $P(x)$ и кратности l многочлена $S(x)$. Доказать, что α — корень кратности $(k+l)$ многочлена $P(x)\cdot S(x)$.

75. Число α — корень кратности k многочлена $P(x)$ и кратности l многочлена $S(x)$, причем $k \leqslant l$. Доказать, что α — корень кратности k многочлена $P(x)+S(x)$.

76. Многочлен $S(x)$ имеет число $\left(-\frac{1}{2}\right)$ своим корнем. Доказать, что корень многочлена $P(x)=4x^2+4x+1+S(x)$ кратности не выше второй.

77. При каких значениях a и b многочлен

$$P(x)=x^4+2x^3+ax^2+(a+b)x+2$$

имеет число (-2) своим корнем кратности 2?

78. Составьте приведенный многочлен наименьшей степени, у которого $\sqrt{2}$ — корень кратности 2, $-\sqrt{2}$ — корень кратности 3.

79. Доказать, что $x=1$ — простой корень многочлена x^n-1 при всех натуральных значениях n.

80. Многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_0\neq 0$ имеет кратный корень.

а) Доказать, что многочлен $S(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ имеет кратный корень.

б) Доказать, что многочлен $T(x)=2^na_nx^n+2^{n-1}a_nx^{n-1}+\ldots+2a_1x+a_0$ имеет кратный корень.

§ 8. Производный многочлен и его свойства

Определение. *Если* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *— многочлен степени* $n\geqslant 1$, *то его производной* (или производным многочленом) *называется многочлен*

$$P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+2a_2x+a_1.$$

Если многочлен $P(x)$ *— константа, то его производная равна нулю.*

Производная многочлена $P(x)$ обозначается символом $P'(x)$.

Примеры.

а) $P(x)=2x^3+5x^2-7x+6$, $P'(x)=6x^2+10x-7$;

б) $P(x)=4$, $P'(x)=0$;

в) $P(x)=0$, $P'(x)=0$;

г) Найдите производные для многочленов: x^3+x-2; x^{10}, $\sqrt{5}\cdot x$.

Мы видим, что производная данного многочлена $P(x)$ есть опять многочлен и, следовательно, $P'(x)$ тоже имеет производную. Обозначим ее символом $P''(x)$ и будем называть *производной второго порядка* от многочлена $P(x)$. Аналогично производную от $P''(x)$ обозначим символом $P'''(x)$ и назовем *производной третьего порядка* от многочлена $P(x)$ и так далее, $P^{(k)}(x)$ — это *производная k-го порядка* от многочлена $P(x)$.

Примеры. 1) $P(x)=x^6-2x^5+x^3+x+1$. Найти $P^{(4)}(x)$.

Решение. $P'(x)=6x^5-10x^4+3x^2+1$, $P''(x)=30x^4-40x^3+6x$, $P'''(x)=120x^3-120x^2+6$, $P^{(4)}(x)=360x^2-240x$.

2) $P(x)=x^7+4x^3$. Найти $P'''(x)$, $P^{(5)}(x)$.

Свойства производной

I. *Если $P(x)$ — многочлен степени n, то $P'(x)$ — многочлен степени $(n-1)$.*

II. *Если $P'(x)$ есть нуль-многочлен, то $P(x)$ — константа.*

III. *Если c — константа, то $[cP(x)]' = c \cdot P'(x)$. (Постоянный множитель можно выносить за знак производной.)*

IV. *Производная суммы двух или нескольких многочленов равна сумме производных слагаемых, т. е. $[P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_k(x)]' = P_1'(x) + P_2'(x) + \ldots + P_k'(x)$.*

V. *Производная разности двух многочленов равна разности их производных, т. е. $[P(x) - Q(x)]' = P'(x) - Q'(x)$.*

VI. *Производная от произведения двух многочленов равна сумме произведений производной первого многочлена на второй и производной второго многочлена на первый, т. е.*

$$[P(x) \cdot Q(x)]' = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x).$$

Рассмотрим некоторые из этих свойств на примерах.

1) $P_1(x) = 2x^2 + 5x + 1$, $P_2(x) = x^3 + 6x^2 - 7x$. Непосредственным подсчетом покажем, что $[P_1(x) + P_2(x)]' = P_1'(x) + P_2'(x)$. $P_1(x) + P_2(x) = x^3 + 8x^2 - 2x + 1$, откуда $[P_1(x) + P_2(x)]' = 3x^2 + 16x - 2$. С другой стороны, $P_1'(x) = 4x + 5$, $P_2'(x) = 3x^2 + 12x - 7$, откуда $P_1'(x) + P_2'(x) = 3x^2 + 16x - 2$.

Итак, $[P_1(x) + P_2(x)]' = P_1'(x) + P_2'(x)$.

2) $P_1(x) = 5x^3 - 2x^2 + 7x - 1$, $P_2(x) = 4x^2 + 5x$. Проверим справедливость свойства V: $[P_1(x) - P_2(x)]' = P_1'(x) - P_2'(x)$. $P_1(x) - P_2(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2x - 1$, откуда $[P_1(x) - P_2(x)]' = 15x^2 - 12x + 2$. С другой стороны, $P_1'(x) = 15x^2 - 4x + 7$, $P_2'(x) = 8x + 5$, откуда $P_1'(x) - P_2'(x) = 15x^2 - 12x + 2$.

Итак, $[P_1(x) - P_2(x)]' = P_1'(x) - P_2'(x)$.

3) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$, $Q(x) = 3x^4 - 2x^2$. Проверим справедливость свойства VI: $[P(x) \cdot Q(x)]' = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x)$. $P(x) \cdot Q(x) = (x^3 + 2x^2 - x + 4)(3x^4 - 2x^2) = 3x^7 + 6x^6 + 8x^4 + 2x^3 - 8x^2$, откуда $[P(x) \cdot Q(x)]' = 21x^6 + 36x^5 - 25x^4 + 32x^3 + 6x^2 - 16x$. С другой стороны,

$$P'(x)=3x^2+4x-1.\ Q'(x)=12x^3-4x, \text{ откуда } P'(x)\cdot Q(x)+$$
$$+P(x)\cdot Q'(x)=(3x^2+4x-1)\cdot(3x^4-2x^2)+$$
$$+(x^3+2x^2-x+4)(12x^3-4x)=$$
$$=(9x^6+12x^5-9x^4-8x^3+2x^2)+$$
$$+(12x^6+24x^5-16x^4+40x^3+4x^2-16x)=$$
$$=21x^6+36x^5-25x^4+32x^3+6x^2-16x.$$

Мы видим, что $[P(x)\cdot Q(x)]'=P'(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot Q'(x)$.

Разумеется, эти примеры еще не доказывают свойства производной.

Свойства I, II непосредственно вытекают из определения производной, и вы их легко докажите самостоятельно. Доказательство свойств III—VI можно найти в вашем учебнике[1].

Рассмотрим еще одно свойство производной, которое нам понадобится в дальнейшем.

VII. $[P^n(x)]'=n\cdot P^{n-1}(x)\cdot P'(x)$ (*n — натуральное*). (1)

Доказательство. Будем доказывать по индукции.

При $n=1$ справедливость равенства (1) очевидна.

Предположим, что равенство (1) выполняется при $n=k$, и докажем, что оно выполняется при $n=k+1$, т. е. докажем, что

$$[P^{k+1}(x)]'=(k+1)\cdot P^k(x)\cdot P'(x).$$

Применяя свойство VI, получим:

$$[P^{k+1}(x)]'=[P^k(x)\cdot P(x)]=[P^k(x)]'\cdot P(x)+P^k(x)\cdot P'(x).$$

По предположению индукции

$$[P^k(x)]'=k\cdot P^{k-1}(x)\cdot P'(x).$$

Поэтому

$$[P^{k+1}(x)]'=k\cdot P^{k-1}(x)\cdot P'(x)\cdot P(x)+P^k(x)\cdot P'(x)=(k+1)\cdot P^k(x)\cdot P'(x),$$

что и требовалось доказать.

Примеры. 1) $P(x)=(2x-3)^5$. Найти $P'(x)$.

Решение. Применяя свойство VII, получим:

$$P'(x)=5(2x-3)^4\cdot(2x-3)'=5\cdot(2x-3)^4\cdot 2=10\cdot(2x-3)^4.$$

2) $P(x)=(x-1)^3\cdot(3x-7)^4$. Найти $P'(x)$.

Решение. Применяя свойства VI и VII, получим:

[1] См.: Е. С. Кочетков, Е. С. Кочеткова, Алгебра и элементарные функции, ч. 2, § 223, 224, 225, 228. М., «Просвещение», 1967.

$$P'(x)=[(x-1)^3]'\cdot(3x-7)^4+(x-1)^3\cdot[(3x-7)^4]'=$$
$$=3(x-1)^2\cdot(x-1)'\cdot(3x-7)^4+(x-1)^3\cdot 4(3x-7)^3\cdot(3x-7)'=$$
$$=3(x-1)^2\cdot(3x-7)^4+12(x-1)^3\cdot(3x-7)^3=$$
$$=(x-1)^2(3x-7)^3(21x-9).$$

Производная и кратные корни многочлена

Теорема. а) *Если α — корень кратности $k\geqslant 2$ многочлена $P(x)$, то α — корень кратности $(k-1)$ многочлена $P'(x)$.*

б) *Если α — простой корень многочлена $P(x)$, то α не является корнем многочлена $P'(x)$.*

Доказательство. а) Пусть α — корень кратности $k\geqslant 2$ многочлена $P(x)$. Это значит, что $P(x)=(x-\alpha)^k\cdot Q(x)$ и $Q(x)$ не делится на $(x-\alpha)$. Тогда

$$P'(x)=[(x-\alpha)^k]'\cdot Q(x)+(x-\alpha)^k\cdot Q'(x)=$$
$$=(x-\alpha)^{k-1}\cdot[k\cdot Q(x)+(x-\alpha)\cdot Q'(x)].$$

Мы видим, что $P'(x) \vdots (x-a)^{k-1}$, причем частное равно:

$$\overline{Q}(x)=k\cdot Q(x)+(x-\alpha)\cdot Q'(x). \qquad (*)$$

Докажем, что $P'(x)$ не делится на $(x-\alpha)^k$. Для этого достаточно показать, что $\overline{Q}(x)$ не делится на $(x-\alpha)$. Из равенства $(*)$ получаем: $\overline{Q}(\alpha)=k\cdot Q(\alpha)$. Но $Q(\alpha)\neq 0$, так как $Q(x)$ не делится на $(x-\alpha)$. Значит, и $\overline{Q}(\alpha)\neq 0$, т. е. по теореме Безу $\overline{Q}(x)$ не делится на $(x-\alpha)$.

Итак, $P'(x) \vdots (x-\alpha)^{k-1}$ и $P'(x)$ не $\vdots (x-\alpha)^k$. Поэтому α — корень кратности $(k-1)$ многочлена $P'(x)$.

Аналогично можно доказать утверждение б).

Следствие. Пусть α — корень кратности k многочлена $P(x)$. Будем последовательно находить производные $P'(x)$, $P''(x)$, ... Из доказанной теоремы следует, что кратность корня α у каждой следующей производной на единицу меньше, чем у предыдущей. Поэтому α для $P^{(k-1)}(x)$ — простой корень; значит, α не является корнем следующей производной $P^{(k)}(x)$.

Итак, *если α — корень кратности k многочлена $P(x)$, то α является корнем всех его производных до $(k-1)$-го порядка включительно и не является корнем производной k-го порядка.*

Примеры. 1) Доказать, что (-1) — корень многочлена

$$P(x)=x^5+2x^4+2x^3+4x^2+5x+2,$$

и найти его кратность.

Решение $P(-1)=-1+2-2+4-5+2=0;$
$$P'(x)=5x^4+8x^3+6x^2+8x+5,$$
$$P'(-1)=5-8+6-8+5=0;$$
$$P''(x)=20x^3+24x^2+12x+8,$$
$$P''(-1)=-20+24-12+8=0;$$
$$P'''(x)=60x^2+48x+12,$$
$$P'''(-1)=60-48+12\neq 0.$$

Мы видим, что (-1) является корнем $P(x)$, $P'(x)$, $P''(x)$, но не является корнем $P'''(x)$. Значит, кратность корня (-1) для $P(x)$ равна трем.

2) Доказать, что $P(x)=x^{10}-5$ не имеет кратных корней.

Решение. $P'(x)=10x^9$. Все корни $P'(x)$ равны 0, но число 0 не является корнем $P(x)$. Поэтому $P(x)$ и $P'(x)$ не имеют общих корней. Значит, все корни многочлена $P(x)$ простые.

3) При каких значениях a $(x^{100}-ax^{15}+ax^6-1)\vdots(x-1)^2$?

Решение. Обозначим делимый многочлен через $P(x)$. Тогда $P(1)=1-a+a-1=0$. Поэтому 1 — корень многочлена $P(x)$ при всех a. Нам нужно найти a, чтобы число 1 было кратным корнем многочлена $P(x)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы число 1 было корнем многочлена $P'(x)$.
$$P'(x)=100x^{99}-15ax^{14}+6ax^5,\quad P'(1)=100-9a=0.$$
Отсюда $a=\frac{100}{9}$.

4) При каких действительных значениях λ многочлены $P(x)=x^3+x^2+\lambda x-4$ и $S(x)=x^2+x-\lambda$ имеют общий корень?

Решение. Разделим $P(x)$ на $S(x)$ углом и найдем остаток.
$$\begin{array}{r|l} -\; x^3+x^2+\lambda x-4 & x^2+x-\lambda \\ \cline{2-2} \underline{x^3+x^2-\lambda x} & x \\ 2\lambda x-4 & \end{array}$$

Мы имеем: $P(x)=x\cdot S(x)+(2\lambda x-4)$, откуда $2\lambda x-4=$ $=P(x)-x\cdot S(x)$. Предположим, что x_0 — общий корень многочленов $P(x)$ и $S(x)$. Тогда из последнего равенства следует, что x_0 — корень остатка, т. е.
$$x_0=\frac{2}{\lambda}.$$

Подставляя это значение x_0 в многочлен $S(x)$, мы должны получить нуль. Следовательно, искомое значение λ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{4}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}-\lambda=0, \text{ или } \lambda^3-2\lambda-4=0. \qquad (1)$$

Остается решить это уравнение. Ищем корни среди делителей свободного члена: ± 1, ± 2, ± 4. Подходит $\lambda_1=2$. Находим частное от деления $\lambda^3-2\lambda-4$ на $(\lambda-2)$ по схеме Горнера:

	1	0	-2	-4
2	1	2	2	0

Частное $\lambda^2+2\lambda+2$ не имеет действительных корней. Таким образом, уравнение (1) имеет единственный корень $\lambda_1=2$ в множестве действительных чисел.

Подставляя $\lambda=2$ в равенство (*), мы находим общий корень многочленов $P(x)$ и $S(x)$: $x_0=1$. Проверим это. При $\lambda=2$ $S(x)=x^2+x-2$. $P(x)=x^3+x^2+2x-4$, $S(1)=P(1)=0$.

Ответ. Многочлены $P(x)$ и $S(x)$ имеют общий корень при $\lambda=2$.

5) При каких действительных значениях a многочлен

$$P(x)=x^3+x^2+ax+3$$

имеет кратный корень?

Решение. Находим $P'(x)$: $P'(x)=3x^2+2x+a$. Многочлен $P(x)$ имеет кратный корень тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень. Задача свелась к предыдущей: при каких значениях a многочлены $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень?

Решаем ее аналогично предыдущей задаче.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+x^2\quad+ax\quad+3 & 3x^2+2x+a \\ \cline{2-2}
x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{a}{3}x\qquad\quad & \frac{1}{3}x+\frac{1}{9} \\ \cline{1-1}
\frac{1}{3}x^2+\frac{2a}{3}x+3 & \\
-\,\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{a}{9} & \\ \cline{1-1}
\frac{2}{9}x(3a-1)+\frac{1}{9}(27-a) &
\end{array}$$

Находим корень остатка: $\frac{2}{9}x(3a-1)+\frac{1}{9}(27-a)=0$, $x_0=\frac{a-27}{6a-2}$. Число x_0 должно быть общим корнем многочленов $P(x)$ и $P'(x)$. Поэтому, подставляя значение x_0 в многочлен $P'(x)$, мы должны получить 0. Таким образом, искомое значение a удовлетворяет уравнению:

$3\cdot\left(\frac{a-27}{6a-2}\right)^2+2\cdot\frac{a-27}{6a-2}+a=0$, или $4a^3-a^2-54a+255=0$.

Решая его, находим единственный действительный корень $a=-5$.

При этом значении a: $P(x)=x^3+x^2-5x+3$, $P'(x)=3x^2+2x-5$, $x_0=1$, $P(1)=P'(1)=0$.

Ответ. Многочлен $P(x)$ имеет кратный корень 1 при $a=-5$.

Упражнения

81. Найти $P''(x)$, если $P(x)=(x-1)^4\cdot(2x+1)^2$.

82. Какова степень многочлена $P(x)$, если $P^{10}(x)=0$?

83. Найти кратность корня $x=2$ многочлена $x^5+4x^4-7x^3-11x^2+4$.

84. Найти значения a, при которых $(x^{17}+ax^6+ax^3+1)\vdots(x+1)^2$.

85. Если n не кратно 3, то $(x^{2n}+x^n+1)\vdots(x^2+x+1)$. Доказать.

86. Найти натуральные значения n, при которых $(x^{2n}+2x^n+1)\vdots(x+1)^2$.

87. Доказать, что при всех натуральных $[nx^{2n}-2\times(n+1)x^n+2nx+(2-n)]\vdots(x-1)^2$.

88. Найти натуральные значения n, при которых $[nx^{2n}-(n+1)x^n+1]\vdots(x-1)^2$.

89. Многочлен $P(x)$ при делении на $(x^3+x+1)^2$ дает остаток x^2+x+5. Какой остаток дает многочлен $P'(x)$ при делении на (x^3+x+1)?

90. Число α — кратный корень многочлена $P(x)$. Доказать, что α — кратный корень многочлена $P(x)+[P'(x)]^2$.

91. Число α — корень кратности 4 многочлена $P(x)$. Доказать, что α является простым корнем многочлена $P(x)+P'(x)+P''(x)+P'''(x)$.

92. При каких значениях λ многочлены $x^3+\lambda x^2+\lambda x+1$ и $x^2+(\lambda+3)x+3$ имеют общий корень?

93. При каких действительных значениях a многочлен $x^3+3x^2+3ax-4$ имеет кратный корень?

имеет

94. При каких значениях a многочлен x^3-4x^2-3x+a имеет кратный корень?

95. Найти многочлен $P(x)$, если $P'(x)=2x^2+5x+1$ и $P(2)=-1$.

96. Найти многочлен $P(x)$, если известно, что он равен натуральной степени своей производной и имеет корень, равный 3.

§ 9. Разные задачи

97. Составьте многочлен, если известны все его корни $x_1=1$, $x_{2,3}=-1$, $x_{4,5}=\pm\sqrt{5}$ и свободный член его равен (-10).

98. Известны три значения многочлена $P(x)$ степени не выше второй: $P(-1)=2$, $P(2)=-7$, $P(3)=2$. Найти $P(0)$.

99. Найти область допустимых значений аргумента для функции

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{5+x}+\sqrt[3]{4-x}-3}.$$

100. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right), \\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=axy, \\ x^4+y^4=bx^2y^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=3a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1, \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{cases}$

101. Найти $P(x)$, если $P(x)=2P'(x)$.

102. Доказать, что многочлен $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ имеет только положительные значения.

103. Представить многочлен x^8+x^4+1 в виде произведения четырех квадратных трехчленов.

104. Найти приведенный квадратный трехчлен, коэффициенты которого (исключая старший) являются его корнями.

105. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

106. Многочлен x^3-5x^2+8x+a имеет кратный корень. Найти многочлен и его корни.

107. $P(x)$ — приведенный многочлен нечетной степени. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} P(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} P(x)=-\infty.$$

108. Может ли многочлен третьей степени с действительными коэффициентами не иметь действительных корней?

109. Доказать, что график любого многочлена третьей степени пересекается с графиком любого многочлена второй степени.

110. Приведите пример двух многочленов второй и четвертой степени, графики которых не пересекаются.

111. Доказать, что многочлен x^3-4x^2+9x+a не имеет кратных действительных корней при всех действительных значениях a.

112. x_1, x_2, x_3 — корни многочлена $-3x^3+4x-4$. Вычислить

$$\frac{x_1x_3}{x_2}+\frac{x_3x_2}{x_1}+\frac{x_2x_1}{x_3}.$$

113. $P(x)$ — приведенный многочлен третьей степени, причем $P(-1)=5$, $P(2)=-3$. Доказать, что многочлен $P(x)$ имеет три действительных корня.

114. При делении многочлена $P(x)$ на (x^2+x-2) получается остаток, равный $2x+1$; число 3 является корнем $P(x)$. Найти остаток, полученный при делении многочлена $P(x)$ на x^3-2x^2-5x+6.

115. Решить неравенства:

а) $4x^4+4x^3-23x^2-20x+15>0$;

б) $\dfrac{x^4+x^3-x^2-8x-11}{4x^3+6x^2-1}\geqslant -1$.

116. Найти все действительные значения a и b, при которых многочлены x^3+ax^2+18 и $x^3+bx+12$ имеют два общих корня. Найти эти корни.

117. Существует ли многочлен, отличный от нуля, который удовлетворяет равенству $P(x)=P'(x)\cdot P''(x)$?

118. Найти многочлен $P(x)$, удовлетворяющий соотношениям: $P(x)=[P''(x)]^2$, $P(0)=9$.

119. Корни многочлена x^3+px^2-6x+8 образуют геометрическую прогрессию. Найти многочлен и его корни.

120. Найти все значения a, при которых многочлен $x^3-x^2+9ax-a$ имеет три положительных корня.

Ответы и решения

1. $-x^5-8x^4-23x^3+19x^2+7x+10$. **4.** Обратное утверждение неверно. **5.** $P(x)=8x^4+3x^3+5x^2+4x+7$. **7.** Нет **8.** Указание. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)=\pm\infty$, если ст. $P(x)\geqslant 1$. **9.** Указание. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном k число $(1+\sqrt{2})^k$ имеет вид: $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональны. **12.** $c(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-10)+x$. **15.** Указание. Докажите тождество $(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots$ $\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1})=x^n-a^n$. **16.** Неверно. **17.** Указание. $(x^{3k}-1)\vdots(x^3-1)$ **22.** а) $Q(x)=0$, $R(x)=x^3+3x-5$; б) $Q(x)=3x+21$, $R(x)=149x^4-9x^3-66x^2-21x-7$; в) $Q(x)=0$, $R(x)=0$; г) $Q(x)=x^{44}+x^{41}+\ldots+x^5+x^2$, $R(x)=x^2-1$; д) $Q(x)=3x-2$, $R(x)=0$. **23.** 7. **24.** $m=-2$. **26.** $a=1$, $b=0$. **27.** $(2x^2-x+1)^2$. **28.** 2. **29.** $2R_1(x)-3R_2(x)$. **32.** x^2+1. **33.** $4x$. **34.** $Q(x)=2x^2-7x+28$, $R(x)=-114$. **35.** $-6x+13$. **36.** $\frac{7}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$. **38.** Решение. По условию $n=3k+1$ или $n=3k+2$, где k—целое неотрицательное число.

Рассмотрим случай $n=3k+1$. Тогда $x^{2n}+x^n+1=$ $=x^{6k+2}+x^{3k+1}+1$. Нам достаточно доказать, что $[(x^{6k+2}+x^{3k+1}+1)-(x^2+x+1)]\vdots(x^2+x+1)$. $(x^{6k+2}+$ $+x^{3k+1}+1)-(x^2+x+1)=x^{6k+2}-x^2+x^{3k+1}-x=x^2\times$ $\times(x^{6k}-1)+x(x^{3k}-1)$. Но $(x^{6k}-1)\vdots(x^3-1)$ (см. № 2 § 2), а следовательно, $(x^{6k}-1)\vdots(x^2+x+1)$. Также и $(x^{3k}-1)\vdots$ (x^2+x+1). Утверждение доказано.

Случай $n=3k+2$ можно рассмотреть аналогично.

39. x^3+2x^2+1. 42. Указание. Воспользуйтесь формулой интерполяционного полинома Лагранжа.

44. Решение. Предположим, что $P(x)=ax^2+bx+c$ — многочлен, указанный в условии. Тогда

$$\frac{P(\sqrt{2})-P(-\sqrt{2})}{2}=b\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \frac{P(\sqrt{2})+P(-\sqrt{2})}{2}=2a+c\text{ —}$$

рациональные числа.

Аналогично

$$\frac{P(\sqrt{3})-P(-\sqrt{3})}{2}=b\sqrt{3} \quad \text{и} \quad \frac{P(\sqrt{3})+P(-\sqrt{3})}{2}=3a+c\text{ —}$$

рациональные числа.

Если $b\neq 0$, то $\frac{b\sqrt{2}}{b\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ было бы рациональным числом, что невозможно. Поэтому $b=0$. Кроме того, $a=(3a+c)-(2a+c)$ рационально и $c=3(2a+c)-2(3a+c)$ рационально.

Итак, если искомый многочлен существует, то он имеет вид: $P(x)=ax^2+c$, где a и c рациональны. Но тогда $P(\sqrt[4]{2})=a\sqrt{2}+c$ иррационально, что противоречит условию.

Таким образом, искомый многочлен не существует.

45. x^2+x+1. 46. x^2+x+1 и $x^2+bx-(b-1)$ при $b\neq 0$. 47. Многочленом является только $f(x)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)$. 48. y^3+2y^2-25. 49. $y^3-\frac{3}{2}y^2-\frac{2}{9}y-\frac{2}{3}$. 50. 1. 51. 3. 52. а) $\{x_1=3,\ y_1=-2\}$, $\{x_2=-2,\ y_2=3\}$, $\left\{x_{3,4}=\frac{-2\pm\sqrt{34}}{2},\ y_{3,4}=\frac{-2\mp\sqrt{34}}{2}\right\}$; б) $\{x_1=y_1=1\}$, $\{x_2=2,\ y_2=-1\}$, $\{x_3=-1,\ y_3=2\}$, $\{x_{4,5}=1\pm\sqrt{2},\ y_{4,5}=1\mp\sqrt{2}\}$; в) $\{x_1=y_1=1,\ z_1=2\}$, $\{x_2=z_2=1,\ y_2=2\}$, $\{x_3=2,\ y_3=z_3=1\}$; г) $\{x_1=2,\ y_1=-1,\ z_1=-2\}$, $\{x_2=-2,\ y_2=1,\ z_2=2\}$, $\{x_3=-1,\ y_3=2,\ z_3=-2\}$, $\{x_4=1,\ y_4=-2,\ z_4=2\}$, $\{x_5=2,\ y_5=2,\ z_5=1\}$, $\{x_6=y_6=-2,\ z_6=-1\}$. 53. $q=68$, $x_1=6+2\sqrt{10}$, $x_2=6$, $x_3=6-2\sqrt{10}$. 54. $r=-8$, $x_1=4$, $x_2=2$, $x_3=1$. 55. $r=-18$, $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=6$. 57. Указание. Рассмотрите приведенный кубический многочлен, корнями которого являются числа a, b и c. 58. $x_1=16$, $x_2=-64$. 60. $a=b=0$. 61. Указание. Представьте:

а) $(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-9x_1x_2x_3$ в виде: $x_1(x_2-x_3)^2+x_2(x_3-x_1)^2+x_3(x_1-x_2)^2$; б) $(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$ в виде: $\frac{1}{2}[(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2+(x_1-x_2)^2]$. **62.** $x_1=x_2=x_3=2$, $r=-8$. **65.** а) $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_{3,4}=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$; б) $x_1=x_2=\frac{1}{5}$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **66.** $(2x-1)^3\cdot(x^2+x+1)$. **67.** Нет. **68.** $\{1, 1, 3\}$. **69.** $x_1=\sqrt{2}$, $x_{2,3}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm 1$. **71.** $x>1$ или $\frac{-3-\sqrt{30}}{3}<x<\frac{-3+\sqrt{30}}{3}$.

72. Решение Предположим, что x_1, x_2 — две рациональные дроби, причем $x_1+x_2=m$, $x_1^2+x_2^2=n$, где m и n — целые числа. Тогда $x_1\cdot x_2=\frac{n^2-m}{2}$. Обозначим n^2-m через a и рассмотрим два случая.

а) $a=2a_1$ — четное. Тогда $x_1\cdot x_2=a_1$ — целое число, а значит, x_1 и x_2 — корни многочлена x_2-mx+a_1 с целыми коэффициентами, что невозможно в силу теоремы 2 § 6.

б) a — нечетное. Тогда x_1 и x_2 — корни многочлена $x^2-mx+\frac{a}{2}$. Сделаем замену $2x=t$. Получим многочлен $P(t)=t^2-2mt+2a$, который имеет корни $2x_1$, $2x_2$ Но $P(t)$ — приведенный многочлен с целыми коэффициентами. Поэтому $2x_1$, $2x_2$ должны быть целыми числами. Произведение $2x_1\cdot 2x_2=2a$ четно. Следовательно, одно из чисел $2x_1$ или $2x_2$ четно (оба эти числа одновременно быть четными не могут, так как a нечетное). Но тогда одно из чисел x_1 или x_2 целое, что противоречит условию.

73. 0. **77.** $a=-\frac{7}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$. **78.** $x^5-\sqrt{2}x^4-4x^3-4\sqrt{2}x^2+4x-4\sqrt{2}$. **81.** $12(x-1)^2(10x^2-1)$. **82** Ст. $P(x)\leqslant 9$. **83.** 1. **84.** $a=\frac{17}{3}$. **86.** n — любое нечетное. 88. $n=1$. **89.** $2x+1$. **92.** $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\frac{7}{2}$. **93.** $a=0$. 94. $a=18$. **95.** $\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+x-\frac{55}{3}$. **96.** $\frac{(x-3)^3}{4}$.

ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ МАТЕМАТИКИ

В. А. Скопец

§ 1. Параллельность и пропорциональность на плоскости и в пространстве

1. В плоскости даны две прямые и точка. Через эту точку провести прямую так, чтобы отрезок, высекаемый на ней данными прямыми, делился данной точкой пополам.

2. В плоскости даны две прямые и точка. Через эту точку провести прямую так, чтобы отрезок, высекаемый на ней данными прямыми, делился данной точкой в данном отношении (как $m:n$, где m и n — данные отрезки).

3. В плоскости даны три прямые a, b и l, проходящие через одну точку. Через точку M, лежащую в этой плоскости, провести прямую так, чтобы прямые a, b и l пересекали ее соответственно в трех точках A, B и L и чтобы отношение $AL:LB$ было равно отношению данных отрезков m и n ($AL:LB=m:n$).

4. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости и точка. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок, высекаемый на ней данными плоскостями, делился этой точкой пополам. Доказать, что все прямые, обладающие указанным свойством, принадлежат одной плоскости. Построить эту плоскость.

5. В пространстве даны две плоскости и точка. Через точку провести прямую так, чтобы отрезок, высекаемый на ней данными плоскостями, делился данной точкой в данном отношении. Доказать, что все прямые, обладаю-

щие указанным свойством, принадлежат одной плоскости. Построить эту плоскость.

6. Три плоскости α, β и γ пересекаются по прямой. Через точку M провести прямую так, чтобы данные плоскости пересекали ее в точках A, B и C и чтобы отношение $AC:CB$ было равно отношению данных отрезков.

7. Даны три точки A, B и C и середины A_1, B_1 и C_1 отрезков BC, CA и AB. Доказать, что точка G, делящая отрезок AA_1 в отношении $2:1$, считая от точки A, делит в таком же отношении и отрезки BB_1 и CC_1. Особо рассмотреть случай, когда точки A, B и C принадлежат одной прямой, т. е. коллинеарны. (G — центроид трех точек A, B и C.)

8. Вершины A, B, C и D тетраэдра $ABCD$ соединены отрезками с центроидами A_0, B_0, C_0 и D_0 его граней BCD, CDA, DAB и ABC.

а) Доказать, что отрезки AA_0, BB_0, CC_0 и DD_0 пересекаются в одной точке (G), которая делит каждый из этих отрезков в отношении $3:1$, считая от вершины. (G — центроид тетраэдра.)

б) Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, проходят через центроид тетраэдра и делятся им пополам.

в) Как формулируются задачи а) и б) для четырех точек A, B, C и D, расположенных в одной плоскости? Изменится ли решение этих задач?

9. Вершины треугольника ABC расположены по одну сторону от плоскости α. Через вершины треугольника и его центроид проведены параллельные друг другу прямые, пересекающие плоскость α соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и G_1.

а) Доказать, что $AA_1+BB_1+CC_1=3GG_1$.

б) Сформулировать и решить аналогичную задачу для того случая, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 расположены в одной плоскости.

в) Как изменится формулировка задачи, если не потребовать, чтобы вершины треугольника лежали по одну сторону от плоскости α?

10. Вершины тетраэдра $ABCD$ расположены по одну сторону от плоскости α. Через вершины тетраэдра и его центроид G проведены параллельные друг другу прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1, D_1 и G_1.

Доказать, что

$$AA_1+BB_1+CC_1+DD_1=4\cdot GG_1.$$

а) Как изменится формулировка и решение задачи, если не потребовать, чтобы вершины тетраэдра были расположены по одну сторону от плоскости α?

б) Сформулируйте задачу для того специального случая, когда плоскость α проходит через центроид тетраэдра (рассмотреть два подслучая).

11*. На прямой p даны два отрезка AB и CD. Построить на этой прямой такую точку X, чтобы $\overline{AX}:\overline{XB}=\overline{CX}:\overline{XD}$. (Отношение $\overline{AX}:\overline{XB}$ положительно, если направленные отрезки $\overline{AX}$ и $\overline{XB}$ сонаправлены; если они противоположно направлены, то отношение отрицательно.)

12. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$, не принадлежащие одной плоскости. Доказать, что прямые BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны одной плоскости.

13. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, не принадлежащие одной плоскости, имеют общий центроид G. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны одной плоскости.

14*. На двух скрещивающихся прямых p и q даны соответственно по три точки: P_1, P_2, P_3 и Q_1, Q_2, Q_3. Доказать, что равенство

$$\overline{P_1P_2}:\overline{P_2P_3}=\overline{Q_1Q_2}:\overline{Q_2Q_3}$$

является условием необходимым и достаточным, чтобы прямые P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 были параллельны одной плоскости.

15. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая полупрямые AB и AD в точках B_1 и D_1. Доказать, что

$$\frac{AB}{AB_1}+\frac{AD}{AD_1}=1.$$

Сформулировать и доказать обратное предложение. (Полупрямая AB направлена от точки A в сторону B.)

16. Дан параллелограмм $ABCD$. Полупрямые AB, AC и AD пересечены прямой p соответственно в точках B_1, C_1 и D_1. Доказать, что

$$\frac{AC}{AC_1}=\frac{AB}{AB_1}+\frac{AD}{AD_1}.$$

17. Через вершину C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая полупрямые AA_1, AB и AD соответственно в точках A_0, B_0 и D_0. Доказать, что

$$\frac{AA_1}{AA_0}+\frac{AB}{AB_0}+\frac{AD}{AD_0}=1.$$

18. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость α пересекает полупрямые AA_1, AB, AC_1 и AD соответственно в точках A_0, B_0, C_0 и D_0. Доказать, что

$$\frac{AA_1}{AA_0}+\frac{AB}{AB_0}+\frac{AC_1}{AC_0}=\frac{AD}{AD_0}.$$

19*. Через центроид G треугольника ABC проведена секущая, встречающая стороны AC и BC соответственно в точках M и N. Доказать, что

$$\frac{AC}{MC}+\frac{BC}{NC}=3.$$

20. Через центроид G тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость α, встречающая ребра DA, DB и DC соответственно в точках L, M и N. Доказать, что

$$\frac{DA}{DL}+\frac{DB}{DM}+\frac{DC}{DN}=4.$$

21. Даны два треугольника. Доказать, что если медианы одного из них параллельны сторонам другого, то и медианы другого параллельны соответственным сторонам первого.

22. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны, то точки пересечения соответствующих сторон этих треугольников принадлежат одной прямой.

23. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена диагональ AC_1. Доказать, что она пересекает плоскость A_1BD в центроиде G треугольника A_1BD и что $AC_1=3AG$.

24*. Через точку M, лежащую внутри трехгранного угла A, провести плоскость так, чтобы точки, в которых она пересекает его ребра, были вершинами треугольника, для которого данная точка M есть центроид.

25. Найти геометрическое место середин отрезков, концы которых принадлежат двум отрезкам AB и CD

26*. Найти геометрическое место центров параллелограммов, вписанных в данный косой четырехугольник

(Четырехугольник называется косым, если его вершины не лежат в одной плоскости.)

27. Прямая l пересекает данные скрещивающиеся прямые m и n в точках M и N. Точка P делит отрезок MN в данном отношении k. Найти геометрическое место точек P, если секущая прямая l, перемещаясь, занимает все возможные положения.

28. Ребра выпуклого четырехгранного угла пересечь плоскостью так, чтобы точки пересечения были вершинами параллелограмма.

29. Ребра выпуклого четырехгранного угла пересечь плоскостью так, чтобы точки пересечения были вершинами трапеции с заданным отношением ее оснований.

30. Через точку, лежащую внутри тетраэдра, провести плоскость так, чтобы она пересекала четыре его ребра в вершинах параллелограмма.

31. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC (или их продолжения) пересечены прямой p в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C}} \cdot \frac{\overline{CA_1}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{BC_1}}{\overline{C_1A}} = -1.$$

Сформулировать и доказать обратную теорему. (Теорема Менелая для треугольника.)

32. Стороны BC, CD, DA и AB четырехугольника $ABCD$ (или их продолжения) пересечены прямой p соответственно в точках P, Q, R и S. Доказать, что

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QD}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = 1.$$

Сформулировать обратную теорему. Верна ли она?

33*. Плоскость α пересекает стороны BC, CD, DA и AB косого четырехугольника $ABCD$ (или их продолжения) соответственно в точках P, Q, R и S. Доказать, что

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QD}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{RA}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = 1.$$

Сформулировать и доказать обратную теорему. (Теорема Менелая для косого четырехугольника.)

34. Дан косой четырехугольник $ABCD$. Стороны AB и CD точками P и Q разделены соответственно в равных отношениях: $AP : PB = DQ : QC$; стороны BC и DA точками M и N также разделены в равных отношениях: $BM : MC = AN : ND$. Доказать, что прямые PQ и MN пересекаются.

§ 2. Площади и объемы

35. Через точку, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы она образовала со сторонами угла треугольник наименьшей площади.

36. Ребра трехгранного угла S пересечены двумя плоскостями соответственно в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2. Доказать, что

$$\frac{V(SA_1B_1C_1)}{V(SA_2B_2C_2)}=\frac{SA_1\cdot SB_1\cdot SC_1}{SA_2\cdot SB_2\cdot SC_2}$$

($V(SA_1B_1C_1)$ — объем тетраэдра $SA_1B_1C_1$).

37*. Через точку M, лежащую внутри трехгранного угла S, провести плоскость так, чтобы она образовала с трехгранным углом тетраэдр наименьшего объема.

38. Внутри угла O дана точка M. Прямая l, проведенная через точку M, пересекает стороны угла в точках A и B. Доказать, что сумма

$$\frac{1}{S(MOA)}+\frac{1}{S(MOB)}$$

не зависит от положения прямой l ($S(MOA)$ — площадь треугольника MOA).

39*. Внутри трехгранного угла O дана точка M. Некоторая плоскость α, проходящая через M, пересекает ребра трехгранного угла в точках A, B и C. Доказать, что отношение

$$\frac{V^2(OABC)}{V(OMAB)\cdot V(OMBC)\cdot V(OMCA)}$$

не зависит от выбора плоскости α.

40. Внутри треугольника ABC найти такую точку M, чтобы площади треугольников BCM, CAM и ABM были пропорциональны трем заданным положительным числам.

41. Внутри тетраэдра $ABCD$ найти такую точку M, чтобы объемы тетраэдров $ABCM$, $BCDM$, $CDAM$, $DABM$ были пропорциональны данным четырем положительным числам.

42*. Дан трехгранный угол $Sabc$ и точка M внутри него. Провести через точку M плоскость α так, чтобы треугольники MAB, MBC и MCA, где A, B и C — точки пересечения плоскости α с ребрами трехгранного угла, имели площади, пропорциональные данным положительным числам.

43. Через пары противоположных ребер тетраэдра проведены соответственно три пары параллельных плоскостей, образующих описанный около тетраэдра параллелепипед. Вычислить отношение объема тетраэдра к объему описанного параллелепипеда.

44. Площади оснований усеченной пирамиды равны S_1 и S_2, а площадь ее среднего сечения равна S. Доказать, что $S > \sqrt{S_1 S_2}$.

45. Даны две пересекающиеся плоскости α и β и направление параллельного проектирования. Доказать, что отношение площадей двух треугольников, принадлежащих плоскости α, равно отношению площадей их параллельных проекций на плоскость β.

46. Внутри треугольника ABC дана точка M. Доказать, что

$$\frac{S(ACM)+S(BCM)}{S(ABM)}=\frac{CM}{MC_1},$$

где C_1 — точка пересечения прямых AB и CM.

47. Внутри тетраэдра $ABCD$ дана точка M. Доказать, что

$$\frac{V(DABM)+V(DBCM)+V(DCAM)}{V(ABCM)}=\frac{DM}{MD_1},$$

где D_1 — точка пересечения прямой DM и плоскости ABC.

48*. Доказать, что плоскость, проходящая через середины двух противоположных ребер тетраэдра, делит его объем пополам.

49*. Через точку M, лежащую внутри тетраэдра $ABCD$, проведена прямая, пересекающая его противоположные ребра AB и CD соответственно в точках P и Q. Доказать, что

$$\frac{V(ABCM)+V(ABDM)}{V(CDAM)+V(CDBM)}=\frac{PM}{MQ}.$$

50. Даны два отрезка AB и CD, расположенные в одной плоскости. Найти геометрическое место точек M в этой плоскости, для которых

$$S(MAB)=S(MCD).$$

51. Даны два треугольника ABC и PQR, принадлежащие различным плоскостям. Найти геометрическое место точек M, для которых

$$V(ABCM)=V(PQRM).$$

52. Даны три треугольника ABC, DEF, PQR, принадлежащие различным плоскостям. Найти геометрическое место точек M, для которых

$$V(ABCM)=V(DEFM)=V(PQRM).$$

§ 3. Разные задачи

53*. Прямая пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC (или их продолжения) соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат одной прямой.

54. Внутри четырехугольника $ABCD$ дана точка M, такая, что

$$S(ABM)=S(BCM)=S(CDM)=S(DAM).$$

Следует ли из этих условий, что $ABCD$ есть параллелограмм?

55*. Сторона AB четырехугольника $ABCD$ разделена точками P и Q на три равные части: $AP=PQ=QB$. Сторона CD также разделена точками R и S на три равные части: $CR=RS=SD$. Доказать, что площадь четырехугольника $PSRQ$ составляет одну треть площади четырехугольника $ABCD$.

Попытайтесь обобщить задачу, разделив противоположные стороны AB и CD четырехугольника на большее число равных частей.

56. На продолжениях стороны AB четырехугольника $ABCD$ построены точки P и Q, такие, что $AQ=BP=\frac{1}{2}AB$. Аналогичным образом на продолжениях стороны CD построены точки R и S, такие, что $DR=SR=\frac{1}{2}CD$. Доказать, что площадь четырехугольника $PQRS$ в два раза больше площади данного.

57*. Каждая из сторон выпуклого четырехугольника разделена на три равные части. Точки деления на противоположных сторонах попарно соединены двумя парами отрезков, определяющих своим пересечением некоторый четырехугольник. Доказать, что площадь его равна $\frac{1}{9}$ площади данного четырехугольника.

58. Каждая из сторон четырехугольника разделена на четыре равные части. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены прямыми, разбивающими четырехугольник на 16 четырехугольников. Доказать, что площадь четырехугольника, составленного из четырех внутренних четырехугольников, составляет $\frac{1}{4}$ площади данного четырехугольника.

59. На продолжениях сторон AB, BC, CD и DA четырехугольника построены точки P, Q, R и S, такие, что $AB=BP$, $BC=CQ$, $CD=DR$, $DS=SA$. Доказать, что площадь четырехугольника $PQRS$ в пять раз больше площади данного четырехугольника.

60. Основания трапеции равны соответственно a и b ($a > b$). Отрезок $c=MN$, параллельный основаниям трапеции, имеет своими концами точки, принадлежащие боковым сторонам трапеции. Доказать, что если прямая MN делит трапецию на равновеликие части, то $c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$; если MN — средняя линия трапеции, то $c=\frac{a+b}{2}$; если MN проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, то $c=\frac{2ab}{a+b}$.

Доказать, что

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

61. Каждая из трех попарно скрещивающихся прямых пересечена тремя другими попарно скрещивающимися прямыми. Доказать, что если первые три прямые параллельны одной плоскости, то вторая тройка прямых также параллельна одной плоскости.

62*. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что прямые BD, A_1C_1, AD_1 и B_1C обладают тем свойством, что любая прямая, пересекающая три из них, пересекает и четвертую прямую или параллельна ей.

63. Доказать, что преобразование, получаемое в результате последовательного выполнения двух гомотетий с различными центрами, есть снова гомотетия (или параллельный перенос), причем три центра гомотетий принадлежат одной прямой.

64*. Доказать, что преобразование, получаемое в результате последовательного выполнения трех гомотетий, центры которых не принадлежат одной прямой, есть снова гомотетия (или параллельный перенос), причем четыре центра гомотетий принадлежат одной плоскости.

65. Плоскость пересекает ребра DA, DB, DC тетраэдра $ABCD$ в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что прямые, соединяющие середины диагоналей четырехугольников ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1, параллельны одной плоскости.

66. Внутри треугольника ABC дана точка M. Прямые AM, BM и CM пересекают стороны треугольника соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Доказать, что

$$\frac{CB_1}{B_1A}+\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{CM}{MC_1}.$$

67. Внутри тетраэдра $ABCD$ дана точка M. Плоскости ABM, BCM и CAM пересекают ребра CD, DA и DB соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Доказать, что

$$\frac{DA_1}{A_1A}+\frac{DB_1}{B_1B}+\frac{DC_1}{C_1C}=\frac{DM}{MD_1},$$

где D_1 — точка пересечения прямой DM с плоскостью ABC.

68. Два тетраэдра имеют общее ребро и общий двугранный угол при нем. Доказать, что объемы этих тетраэдров относятся как произведения площадей граней, заключающих общий двугранный угол.

II

§ 4. Метрические задачи планиметрии

69. Около окружности описан четырехугольник. Доказать, что суммы его противоположных сторон равны. Сформулировать и доказать обратную теорему.

70. Доказать, что если сумма квадратов всех сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей, то четырехугольник параллелограмм.

71. Около окружности радиуса r описан правильный двенадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$. Доказать, что

$$A_1A_2+A_1A_4=2r.$$

72. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что его стороны и диагонали связаны соотношением

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

Сформулировать и доказать обратную теорему. (Теорема Птолемея.)

73*. В окружность вписан правильный семиугольник $A_1A_2 \ldots A_7$. Доказать, что

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}.$$

74*. Найти зависимость между шестью отрезками, соединяющими попарно четыре данные точки.

Пользуясь полученной формулой, выразить радиус окружности, описанной около треугольника, через его стороны.

75*. Около окружности описан четырехугольник. Доказать, что его диагонали и прямые, проходящие через точки касания окружности с противоположными сторонами четырехугольника, пересекаются в одной точке.

76. В треугольник вписана окружность. При помощи одной линейки провести к этой окружности касательную, проходящую через заданную на стороне треугольника точку. (Точки касания окружности со сторонами даны.)

77. Углы треугольника связаны соотношением

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}.$$

Доказать, что хотя бы один из углов треугольника равен $\frac{\pi}{3}$.

78. Доказать, что если углы треугольника ABC удовлетворяют условию

$$\sin^2 A+\sin^2 B=5\sin^2 C,$$

то $\sin C\leqslant\frac{3}{5}$.

§ 5. Центральная и осевая симметрия на плоскости

79. Доказать, что результат последовательного выполнения двух центральных симметрий относительно центров A и B есть параллельный перенос на вектор $2\overline{AB}$. Представить перенос, заданный вектором $\bar{a}$, как результат последовательного выполнения двух центральных симметрий.

80. Доказать, что результат последовательного выполнения четырех центральных симметрий относительно вершин параллелограмма есть тождественное преобразование.

81. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Доказать, что результат последовательного выполнения центральных симметрий относительно этих центров есть центральная симметрия. Построить центр этого преобразования симметрии.

82. Доказать, что результат последовательного выполнения четного числа центральных симметрий есть параллельный перенос или тождественное преобразование, а результат последовательного выполнения нечетного числа центральных симметрий есть центральная симметрия.

83. Построить пятиугольник (семиугольник) по упорядоченно заданным серединам его сторон.

84. Доказать, что если заданные шесть точек служат серединами сторон одного шестиугольника, то эти же точки служат серединами сторон бесконечного множества шестиугольников.

85. Доказать, что результат последовательного выполнения двух различных осевых симметрий есть вращение или параллельный перенос. Как должны быть расположены оси симметрии, чтобы полученное вращение не зависело от порядка выполнения данных осевых симметрий?

86. Доказать, что результат последовательного выполнения трех различных осевых симметрий тогда и только тогда будет осевой симметрией, когда оси данных симметрий проходят через одну точку или параллельны.

87*. Доказать, что результат последовательного выполнения двух вращений около различных центров есть вращение или параллельный перенос. Построить центр этого вращения или вектор переноса. Зависит ли положение центра вращения от порядка выполнения данных вращений?

88. Доказать, что результат последовательного выполнения вращения и параллельного переноса есть вращение. Как изменится результирующее преобразование, если изменить порядок выполнения данных преобразований?

89. Доказать, что если результат выполнения трех осевых симметрий не меняется при выполнении этих

симметрий в обратном порядке, то оси таких симметрий пересекаются в одной точке или параллельны.

90*. Даны две точки A и B и прямая m. Как расположены эти точки по отношению к прямой, если результат последовательного выполнения центральной симметрии относительно точки A и осевой симметрии относительно прямой m совпадает с результатом последовательного выполнения осевой симметрии относительно прямой m и центральной симметрии относительно точки B?

§ 6. Трехгранный угол

91. Доказать, что если два плоских угла одного трехгранного угла равны соответственно двум плоским углам другого трехгранного угла, а двугранные углы, заключенные между ними, не равны, то против большего двугранного угла лежит и больший плоский угол. Сформулировать и доказать обратную теорему.

92. Доказать, что объем тетраэдра $SABC$, у которого ребра SA, SB и SC равны 1, а плоские углы при вершине S равны α, β и γ, может быть вычислен по формуле

$$v=\frac{1}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

93. Плоские углы трехгранного угла равны соответственно α, β и γ, а противолежащие им двугранные углы равны A, B и C. Доказать, что:

1) $\cos A=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}$;

2) $\cos\alpha=\dfrac{\cos A+\cos B\cdot\cos C}{\sin B\cdot\sin C}$.

(Теорема косинусов для трехгранного угла.)

94. Плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ, а противоположные им двугранные углы равны соответственно A, B и C. Доказать, что

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\sin B}{\sin\beta}=\frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

95. Доказать, что против равных плоских углов трехгранного угла лежат равные двугранные углы.

96. Доказать, что если три плоских (двугранных) угла одного трехгранного угла соответственно равны трем

плоским (двугранным) углам другого трехгранного угла, то такие трехгранные углы равны.

97. Известны плоские углы трехгранного угла. Вычислить угол наклона ребра трехгранного угла к противоположной грани.

98. Сумма плоских углов трехгранного угла равна 180°. Доказать, что сумма косинусов его двугранных углов равна 1.

99. Доказать, что плоскости, проведенные через ребра трехгранного угла и биссектрисы противоположных им плоских углов, пересекаются по одной прямой.

100. Дан трехгранный угол, среди двугранных углов которого нет прямых углов. Доказать, что плоскости, проведенные через ребра трехгранного угла перпендикулярно к противоположным граням, пересекаются по одной прямой.

101*. В плоскости каждой грани трехгранного угла через его вершину проведена прямая, перпендикулярная противолежащему ей ребру. Доказать, что построенные прямые принадлежат одной плоскости.

102. В гранях (b, c), (c, a) и (a, b) трехгранного угла $Sabc$ проведены соответственно полупрямые a_1, b_1 и c_1. Доказать, что равенство

$$\frac{\cos(\widehat{a, b_1})}{\cos(\widehat{b_1, c})} \cdot \frac{\cos(\widehat{c, a_1})}{\cos(\widehat{a_1, b})} \cdot \frac{\cos(\widehat{b, c_1})}{\cos(\widehat{c_1, a})} = 1$$

есть необходимое и достаточное условие того, что плоскости, проведенные через a_1, b_1 и c_1 перпендикулярно к соответствующим граням трехгранного угла, проходят через одну прямую.

103. Построить прямой трехгранный угол, ребра которого проходят через три данные точки. (Трехгранный угол называется прямым, если его плоские углы прямые.)

104. Плоскость отсекает на ребрах прямого трехгранного угла отрезки, равные a, b и c. Вычислить площадь полученного треугольного сечения.

105. Через вершину S прямого трехгранного угла $Sabc$ проведена полупрямая d. Доказать, что

$$\cos^2(\widehat{a, d}) + \cos^2(\widehat{b, d}) + \cos^2(\widehat{c, d}) = 1.$$

106*. Через вершину S правильного трехгранного угла $Sabc$ с плоским углом φ проведена полупрямая d, образующая с ребрами углы α, β и γ. Найти зависимость между α, β, γ и φ.

107. Даны два трехгранных угла $Sabc$ и $S_1a_1b_1c_1$. Доказать, что если a и a_1, b и b_1, c и c_1 образуют три пары пересекающихся прямых, то соответствующие грани b, c и b_1, c_1; c, a и c_1, a_1; a, b и a_1, b_1 пересекаются по прямым, расположенным в одной плоскости.

108. Через ребро a трехгранного угла $Sabc$ проведена биссекторная плоскость, пересекающая противолежащую грань (b, c) по полупрямой d. Доказать, что

$$\frac{\sin(\widehat{b, d})}{\sin(\widehat{c, d})}=\frac{\sin(\widehat{a, b})}{\sin(\widehat{a, c})}.$$

§ 7. Геометрические места

109. Найти геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от двух плоскостей.

110. Найти геометрическое место точек, каждая из которых имеет заданное (постоянное) отношение расстояний до двух данных плоскостей.

111. Найти геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от двух данных прямых, принадлежащих одной плоскости.

112. Найти геометрическое место точек, каждая из которых имеет заданное отношение расстояний до двух прямых, принадлежащих одной плоскости.

113. Найти геометрическое место точек, каждая из которых имеет заданные расстояния d_1 и d_2 до двух данных точек A и B.

114. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек постоянно.

115. Найти геометрическое место точек, расстояния которых до трех данных точек пропорциональны трем данным положительным числам.

116. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек постоянна.

117. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний которых до трех (четырех) данных точек постоянна.

118. Доказать, что геометрическое место точек, разность квадратов расстояний которых до двух данных точек постоянна, есть плоскость.

119. Найти геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от трех данных плоскостей, имеющих только одну общую точку.

120. Найти геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от трех прямых, расположенных в одной плоскости и образующих своим пересечением треугольник.

121. Найти геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от трех прямых, проходящих через одну точку, но не лежащих в одной плоскости.

122. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и образующих с данной прямой угол, равный данному.

123. Найти геометрическое место прямых, равноудаленных от данной прямой.

124. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку и образующих с данной плоскостью данный угол.

125. Найти геометрическое место прямых, проходящих через данную точку, причем каждая из прямых образует с данными двумя пересекающимися плоскостями равные углы.

126. Охарактеризовать множество плоскостей, каждая из которых одинаково удалена от двух данных точек A и B.

127. Охарактеризовать множество плоскостей, проходящих через данную точку и образующих с данной прямой данный угол.

128. Охарактеризовать множество плоскостей, проходящих через данную точку и образующих с данной плоскостью данный угол.

§ 8. Неравенства

129. Доказать, что против большего плоского угла трехгранного угла лежит больший двугранный угол и обратно.

130. Доказать, что сумма углов косого четырехугольника меньше $360°$.

131. Дан отрезок AB и его середина M. Доказать, что для любой точки P пространства имеет место неравенство

$$PM \leqslant \frac{1}{2}(PA + PB).$$

Выяснить, для каких точек P имеет место равенство.

132. Дан отрезок AB и его середина M. Доказать, что для любой точки пространства имеет место неравенство

$$PM \geqslant |PA - PB|.$$

Выяснить, для каких точек P имеет место равенство.

133. Дан треугольник ABC и точка пересечения G его медиан. Доказать, что для любой точки P пространства имеет место неравенство

$$PG < \frac{1}{3}(PA + PB + PC).$$

134. Дан тетраэдр $ABCD$ и его центроид G. Доказать, что для любой точки P пространства имеет место неравенство

$$PG < \frac{1}{4}(PA + PB + PC + PD).$$

135. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки пространства до концов отрезка достигает минимума, когда эта точка совпадает с серединой отрезка.

136. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки пространства до вершин треугольника достигает минимума, когда точка совпадает с центроидом треугольника.

137. Доказать, что сумма квадратов расстояний точки пространства до вершин тетраэдра достигает минимума, когда точка совпадает с центроидом тетраэдра.

138. Точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α. Найти на плоскости такую точку P, чтобы сумма $PA + PB$ была наименьшей.

139. Точки A и B лежат по разные стороны от плоскости α. Построить в плоскости α такую точку P, чтобы разность $|PA - PB|$ была наибольшей.

140. Даны угол AOB и плоскость α, проходящая через его вершину O, причем стороны угла лежат по одну сторону от плоскости. Построить в плоскости α такую полу-

прямую OC, чтобы сумма

$$\angle AOC + \angle BOC$$

была наименьшей.

141*. Противоположные стороны косого четырехугольника равны соответственно a и c, b и d. Доказать, что

$$ef < ac + bd,$$

где e и f — диагонали четырехугольника.

§ 9. Перпендикулярность на плоскости и в пространстве

142. Доказать, что необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух отрезков AB и CD (расположенных в одной плоскости или на скрещивающихся прямых) является соотношение

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2.$$

143. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон вписанного в окружность четырехугольника на соответственно противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

144*. Доказать, что шесть плоскостей, проведенных через середины шести ребер тетраэдра перпендикулярно к соответствующим противоположным к ним ребрам, пересекаются в одной точке.

145. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC даны соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Доказать, что соотношение

$$AC_1^2 - C_1B^2 + BA_1^2 - A_1C^2 + CB_1^2 - B_1A^2 = 0$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы прямые, проведенные через точки A_1, B_1 и C_1 соответственно перпендикулярно к BC, CA и AB, пересекались в одной точке.

146. Даны четыре точки A, B, C и D (на плоскости или в пространстве). Доказать, что если $AB \perp CD$ и $BC \perp DA$, то $CA \perp BD$.

147. Доказать, что если прямоугольная проекция какой-либо вершины тетраэдра на противоположную грань совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот) этой грани, то прямоугольная проекция любой вершины тетраэдра на соответствующую противоположную грань также совпадает с ортоцентром грани.

148*. В плоскости треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые, перпендикулярные к PA, PB и PC. Доказать, что эти прямые пересекают соответственно стороны BC, CA и AB в точках, расположенных на одной прямой. (Точка P не принадлежит ни одной из высот треугольника.)

149. На сторонах BC, CD, DA и AB косого четырехугольника $ABCD$ даны соответственно точки P, Q, R и S. Доказать, что соотношение

$$AP^2-PB^2+BQ^2-QC^2+CR^2-RD^2+DS^2-SA^2=0$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы плоскости, проведенные через точки P, Q, R и S соответственно перпендикулярно к BC, CD, DA и AB, пересеклись в одной точке.

150. На плоскости даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что если прямые, проведенные соответственно через A, B и C перпендикулярно к B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, пересекаются в одной точке, то и прямые, проведенные через A_1, B_1 и C_1 перпендикулярно к BC, CA и AB, также пересекаются в одной точке.

151. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не принадлежат одной плоскости. Доказать, что если плоскости, проведенные через A, B и C перпендикулярно к B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, пересекаются по одной прямой, то и плоскости, проведенные через A_1, B_1 и C_1 перпендикулярно к BC, CA и AB, также пересекаются по одной прямой.

152*. Четыре луча a, b, c и d имеют общее начало. Доказать, что необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей (a, c) и (b, d) выражается равенством

$$\cos(\widehat{a, b})\cdot\cos(\widehat{c, d})=\cos(\widehat{b, c})\cdot\cos(\widehat{d, a}).$$

153. Плоскости α, β и γ имеют общую прямую. Через прямую a, принадлежащую α, проведена плоскость α', перпендикулярная β и пересекающая γ по прямой c; через прямую c проведена плоскость γ', перпендикулярная α и пересекающая β по прямой b. Доказать, что плоскость (a, b) перпендикулярна плоскости γ.

§ 10. Конструктивные задачи

154. Построить четыре луча с общим началом, чтобы они попарно образовали шесть равных друг другу углов Вычислить косинус этого угла.

155. Построить такие четыре луча a, b, c и d с общим началом, чтобы $\angle(a, b)=\angle(c, d)$, $\angle(b, c)=\angle(d, a)$, $\angle(c, a)=\angle(b, d)$.

156. Пересечь грани тетраэдра плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

157*. Даны плоскость и параллелограмм, расположенный вне плоскости. Найти направление параллельного проектирования, при котором параллелограмм проектируется на данную плоскость в квадрат.

158. Через данную прямую провести плоскость так, чтобы она образовала с двумя данными плоскостями равные углы.

159. Через данную точку провести плоскость так, чтобы она образовала с двумя данными плоскостями равные углы.

160. Дан треугольник $A_1B_1C_1$, являющийся параллельной проекцией некоторого треугольника ABC, стороны которого известны. Построить точку M_1, являющуюся образом в этой параллельной проекции центра M окружности, вписанной в треугольник ABC.

161. Дан треугольник $A_1B_1C_1$, являющийся параллельной проекцией треугольника ABC, стороны которого известны. Построить точку H_1, являющуюся образом в этой параллельной проекции ортоцентра H треугольника ABC. Решить аналогичную задачу для центра M окружности, описанной около треугольника ABC.

162. Пересечь прямой трехгранный угол плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник, равный данному.

163. Провести прямую, образующую с тремя данными плоскостями равные углы.

164. Через данную точку провести плоскость, образующую с тремя данными плоскостями равные углы.

165. Через данную точку провести плоскость, образующую с тремя данными прямыми равные углы.

166. Через данную точку провести прямую, образующую с тремя данными прямыми равные углы.

§ 11. Площади и объемы

167*. Площади граней BCD, CDA, DAB и ABC тетраэдра $ABCD$ равны соответственно S_1, S_2, S_3 и S_4. Доказать, что

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_2S_3\cos\alpha - 2S_3S_1\cos\beta - 2S_1S_2\cos\gamma,$$

где α, β и γ — линейные углы двугранных углов тетраэдра при его ребрах DA, DB и DC. (Теорема косинусов для тетраэдра.)

168*. Дан тетраэдр, у которого два противоположных двугранных угла прямые. Доказать, что суммы квадратов площадей граней тетраэдра, образующих эти прямые углы, равны.

169. а) Доказать, что сумма квадратов площадей всех боковых граней параллелепипеда равна сумме квадратов площадей двух его диагональных сечений, проходящих через диагонали оснований параллелепипеда.

б) Доказать, что сумма квадратов площадей всех диагональных сечений параллелепипеда равна удвоенной сумме квадратов площадей всех его граней.

170*. Доказать, что при любом положении точки M пространства относительно параллелограмма $ABCD$ имеет место соотношение

$$S^2(ABCD) + 4\left[S^2(AMC) + S^2(BMD)\right] = 4\left[S^2(AMB) + S^2(BMC) + S^2(CMD) + S^2(DMA)\right].$$

171. Доказать, что сумма квадратов площадей всех граней тетраэдра равна сумме квадратов площадей всех шести его сечений, расположенных в плоскостях, проходящих через каждое ребро и середину соответствующего противоположного ребра.

172. Через ребро AB тетраэдра $ABCD$ проведена плоскость α, делящая линейный угол двугранного угла тетраэдра при этом ребре пополам. Доказать, что α пересекает ребро CD в такой точке M, что

$$CM : MD = S(ABC) : S(ABD) = V(ABCM) : V(ABDM).$$

173. Противоположные ребра тетраэдра равны соответственно a, b и c. Вычислить объем этого тетраэдра.

174. Выразить объем тетраэдра через длины трех его ребер, исходящих из одной вершины, и плоских углов при этой вершине.

175*. Выразить объем тетраэдра через длины всех его ребер.

176. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ можно вычислить по формуле

$$V=\frac{2}{3AB}S(ABC)\cdot S(ABD)\cdot\sin\varphi,$$

где φ — линейный угол двугранного угла при ребре AB данного тетраэдра.

177. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ можно вычислить по формуле

$$V=\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot h\sin\varphi,$$

где φ — угол между ребрами AB и CD, а h — расстояние между ними.

§ 12. Окружность и сфера

178. На одной стороне угла A даны точки M и N, а на другой стороне — точки P и Q. Доказать, что если

$$AM\cdot AN=AP\cdot AQ,$$

то через точки M, N, P и Q можно провести окружность.

179. Две прямые пересекаются в точке A. На одной из них по разные стороны от A даны две точки M и N, а на другой, также по разные стороны от A, — точки P и Q. Доказать, что если

$$AM\cdot AN=AP\cdot AQ,$$

то через точки M, N, P и Q можно провести окружность.

180. Доказать, что через четыре точки, не лежащие на одной плоскости, можно провести сферу, и притом только одну; аналогично доказать, что через окружность и точку, не лежащую в плоскости окружности, можно провести сферу, и притом только одну.

181. Доказать, что через две пересекающиеся в двух точках окружности, не принадлежащие одной плоскости, можно провести сферу, и притом только одну.

182. Две окружности, расположенные в различных плоскостях, имеют общую точку и в ней общую касательную. Доказать, что через эти окружности можно провести сферу.

183. Три прямые, не принадлежащие одной плоскости, пересекаются в точке A; на прямых даны пары точек M и N, P и Q, R и S, расположенные по одну сторону (по разные стороны) от A. Доказать, что если

$$AM \cdot AN = AP \cdot AQ = AR \cdot AS,$$

то через эти три пары точек можно провести сферу.

184*. Через точки A и B проведен ряд окружностей, каждая из которых пересекает данную окружность ω в парах точек. Доказать, что прямые, проходящие через эти пары точек, или пересекаются в одной точке, или параллельны.

185. На плоскости даны окружность и две точки. Провести через эти точки окружность, касающуюся данной окружности.

186. На плоскости даны прямая и две точки. Провести через данные точки окружность, касающуюся данной прямой.

187*. Через две данные точки проведен ряд окружностей, пересекающих данную сферу в парах точек. Доказать, что прямые, проходящие через эти пары точек, или пересекаются в одной точке, или параллельны.

188. Через данную окружность проведен ряд сфер, пересекающих данную сферу по окружностям. Доказать, что эти окружности принадлежат плоскостям или проходящим через одну прямую, или же параллельным между собой.

189. Найти геометрическое место точек касания данной сферы с окружностями, проходящими через две данные точки.

190*. Через точки A и B проведен ряд сфер, пересекающих данную сферу по окружностям. Доказать, что плоскости этих окружностей или пересекаются в одной точке на прямой AB, или параллельны ей.

191. Найти геометрическое место точек касания данной сферы со сферами, проходящими через данные две точки.

192. Через данную окружность провести сферу, касающуюся данной плоскости.

193. Через данную окружность провести сферу, касающуюся данной сферы.

194*. Найти геометрическое место точек касания данной плоскости со сферами, проходящими через две данные точки.

195. Через данную окружность провести сферу, касающуюся данной прямой.

196. Через две данные точки провести сферу, касающуюся двух данных плоскостей.

197. Стороны косого четырехугольника касаются сферы. Доказать, что суммы противоположных сторон четырехугольника равны, а точки касания принадлежат одной плоскости.

198. Две окружности ω_1 и ω_2, лежащие в одной плоскости, пересекаются в точках A и B. Через точку P окружности ω_1 проведены прямые PA и PB, пересекающие ω_2 в точках C и D. Доказать, что хорда C параллельна касательной t к ω_1 в точке P.

199*. Точка s, не лежащая на сфере σ_1, соединена прямой с точкой P окружности ω, принадлежащей σ_1. Прямая SP пересекает σ в точке Q. Доказать, что точка Q описывает окружность ω_1, когда точка P описывает окружность ω.

200. Плоскость α касается сферы σ_1 в точке A. Доказать, что центральной проекцией окружности ω_1, принадлежащей σ_1, из точки B, диаметрально противоположной точке A, на плоскость α служит окружность или прямая.

§ 13. Цилиндрическая и коническая поверхности

201. Доказать, что если сфера касается трех образующих цилиндрической поверхности, то она касается всех ее образующих.

202. Построить цилиндрическую поверхность по ее двум образующим и касательной.

203. Построить цилиндрическую поверхность по ее одной образующей и двум касательным.

204. Построить цилиндрическую поверхность по двум касательным плоскостям и точке.

205. Построить цилиндрическую поверхность по двум образующим и касательной плоскости.

206*. Стороны косого четырехугольника касаются цилиндрической поверхности. Доказать, что точки касания принадлежат одной плоскости.

207. Дан трехгранный угол. Описать около него коническую поверхность (т. е. построить такую коническую поверхность, чтобы ребра трехгранного угла принадлежали трем ее образующим).

208*. Четыре прямые пересекаются в точке S. Какова должна быть зависимость между углами, образованными каждыми двумя прямыми, чтобы эти прямые принадлежали конической поверхности.

209. Дан трехгранный угол. Доказать, что существует единственная коническая поверхность, которая касается граней трехгранного угла, и четыре конические поверхности, которые касаются плоскостей граней трехгранного угла.

210*. Около конической поверхности описан четырехгранный угол. Доказать, что суммы его плоских противоположных углов равны. Сформулировать и доказать обратное предложение.

211*. Через вершину S конической поверхности проведена прямая p. Плоскость α, проходящая через p, пересекает коническую поверхность по образующим a и b. Доказать, что произведение

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\widehat{p, a}) \cdot \operatorname{tg} (\widehat{p, b})$$

не зависит от выбора плоскости α в пучке плоскостей, проходящих через прямую p.

212*. Стороны косого четырехугольника касаются конической поверхности. Доказать, что точки касания принадлежат одной плоскости.

213. Построить коническую поверхность по ее вершине и трем попарно скрещивающимся касательным.

214. Доказать, что если сфера касается трех образующих конической поверхности, то она касается всех ее образующих.

§ 14. Разные задачи

215. Две непараллельные плоскости пересечены прямой. Доказать, что отношение расстояний точек пересечения прямой с плоскостями до общей прямой этих плоскостей сохраняется при замене данной прямой, ей параллельной.

216*. Два подобных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в разных плоскостях и имеют общий центр вписанных окружностей. Доказать, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны одной плоскости.

217. Центроид тетраэдра совпадает с центром вписанной в него сферы. Доказать, что противоположные ребра тетраэдра попарно равны.

218. Разверткой тетраэдра служат четыре треугольника, образующие один треугольник. Определить вид этого треугольника.

219. Известны длины ребер тетраэдра. Вычислить косинус острого угла между двумя его противоположными ребрами.

220. Дан прямоугольный тетраэдр $SABC$ с прямым трехгранным углом S. Доказать, что

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

где γ, α, β — углы, образованные гранями SAB, SBC, SCA с гранью ABC.

221. Выразить расстояние от вершины тетраэдра до центроида противоположной грани через длины всех ребер тетраэдра.

222. Выразить расстояние между серединами двух противоположных ребер тетраэдра через длины всех его ребер.

223. Вычислить радиус сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра, через длину ребра тетраэдра.

224. В тетраэдр $ABCD$ вписана сфера, касающаяся его граней соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доказать, что углы AD_1B, BD_1C и CD_1A, расположенные в плоскости грани ABC, равны соответственно углам, аналогичным образом построенным в плоскостях других граней данного тетраэдра.

225. Через одну из диагоналей куба и каждую из остальных его диагоналей проводится соответственно по плоскости. Вычислить углы между построенными плоскостями.

226. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c. Пересечь их прямой соответственно в точках A, B и C так, чтобы отношение $AB:BC$ было равно данному отношению.

227*. Диагональные плоскости четырехгранного угла $Sabcd$ пересекаются по общей биссектрисе l равных углов $(\widehat{a, c})$ и $(\widehat{b, d})$. Доказать, что если плоскость пересекает ребра четырехгранного угла в точках A, B, C, D, то

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}.$$

228. Прямая, проведенная через вершину A тетраэдра $ABCD$ и через центр M вписанной в него сферы, пересекает его грань BCD в точке A_1. Доказать, что

$$\frac{AM}{MA_1}=\frac{s_1+s_2+s_3}{s_4},$$

где s_1, s_2, s_3 и s_4 — площади граней BCD, CDA, DAB и ABC.

III.

§ 15. Делимость чисел

229. Доказать, что при делении квадрата натурального числа на 3 не может получиться остаток, равный 2.

230. Доказать, что сумма нечетных степеней двух последовательных натуральных чисел, не делящихся на 3, кратна 3.

231. Доказать, что число $121n-3$ ни при каком целом n нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

232. Доказать, что для любого натурального n число

$$5^{2n-1}\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}\cdot 2^{2n-1}$$

делится на 19.

233. Доказать, что для любого целого неотрицательного n число

$$5^{6n+5}+7^{6n+7}$$

делится на 9.

234. Доказать, что сумма

$$1+\underbrace{111\ldots1}_{m}\cdot\underbrace{1000\ldots05}_{m+1}$$

есть квадрат натурального числа.

235. Доказать, что при всяком нечетном x выражение

$$x^3+3x^2-x-3$$

кратно 48.

236. Доказать, что $11^{10}-1$ делится на 100.

237. Доказать, что произведение четырех последовательных целых чисел, увеличенное на единицу, есть квадрат натурального числа.

238. Найти натуральное число, если его квадрат оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами.

§ 16. Суммы и последовательности

239. Найти сумму

$$s=\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

240. Доказать, что

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1).$$

241. Вычислить суммы

1) $s=1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2$;

2) $s=x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n$;

3) $s=-x+2x^2-3x^3+\ldots+(-1)^n nx^n$.

242. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

243. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Вычислить сумму

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}.$$

244. Найти формулу общего члена a_n последовательности, если

$$a_{k+1}=2a_k+1,\ a_1=1.$$

245. Дана бесконечная последовательность чисел, определяемая формулой

$$a_{k+1}=\frac{3a_k-1}{-a_k+3},\ k=1, 2, 3, \ldots$$

Выразить общий член последовательности a_n через a_1 и n; найти предел этой последовательности.

246. Дана последовательность

$$a_k=3a_{k-1}+2^{k-1},\ k\geqslant 2,\ a_1=1.$$

Выразить общий член последовательности a_n через n.

247. Доказать, что

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1).$$

248. Последовательность чисел обладает тем свойством, что $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$. Доказать, что данная последовательность имеет предел, и найти его.

§ 17. Числовые тождества

Доказать истинность следующих числовых тождеств:

249. $\cos 86^\circ 15'=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

250. $\cos 27^\circ=\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)$,

$\sin 12^\circ=\frac{1}{8}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$.

251. $\cos 27^\circ-\cos 63^\circ=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}$.

252. $-\sin 41^\circ\cdot\sin 19^\circ+\cos^2 11^\circ=\frac{3}{4}$.

253. $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

254. $\operatorname{tg} 20^\circ+\operatorname{tg} 40^\circ+\operatorname{tg} 80^\circ=8\sin 40^\circ+\sqrt{3}$.

255. $\operatorname{tg} 55^\circ\cdot\operatorname{tg} 65^\circ\cdot\operatorname{tg} 75^\circ=\operatorname{tg} 85^\circ$.

256. $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

257. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

258. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{2}{9}=\frac{\pi}{4}$.

259. $C_n^n+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\ldots+C_{n+m}^n=C_{n+m+1}^{n+1}$.

260. $C^0+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n=2^{n-1}(n+2)$.

261. $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

262. $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

263. $(C_{2n+1}^0)^2-(C_{2n+1}^1)^2+(C_{2n+1}^2)^2-\ldots-(C_{2n+1}^{2n+1})^2=0$.

18. Неравенства

264*. Доказать, что

$$n(x_1^n+\ldots+x_n^n)\geqslant(x_1+\ldots+x_n)(x_1^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}),$$
$$x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

265. Доказать, что

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2,$$

где $x_i>0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

266*. Доказать, что

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$

где $x_i\geqslant 0$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

267. Доказать, что

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2\leqslant$$
$$\leqslant(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2).$$

268*. Доказать, что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

269. Доказать, что если $a+b+c=1$, то

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

270. Доказать, что если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

271. Доказать, что

$$\frac{1}{4}\leqslant\sin^6 x+\cos^6 x\leqslant 1.$$

272. Доказать, что при $0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$\sin(\cos\varphi)<\cos(\sin\varphi).$$

273. Доказать, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$2x < \sin x + \operatorname{tg} x.$$

274. Доказать, что для целых неотрицательных значений k имеет место неравенство

$$|\sin kx| \leqslant k |\sin x|.$$

§ 19. Уравнения

275. Доказать, что корни уравнения

$$6x^2 - 3(a+b+c+d)x + (ab+bc+cd+da+ac+bd) = 0$$

вещественны, если a, b, c, d вещественны.

276. Решить уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+a+b} = 0.$$

277*. Доказать, что если коэффициенты уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

удовлетворяют условию $p^2 < 3q$, то уравнение имеет только один вещественный корень.

Решить уравнения:

278. $(x+m)^4 + (x+n)^4 = p.$

279. $x^2 + \frac{a^2x^2}{(x+a)^2} = m^2,\ a > 0,\ m \neq 0.$

280. $\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x,\ p > 0.$

281. $\sqrt[4]{x+10} + \sqrt[4]{7-x} = 3.$

282. $4^{1-x} - 3^{\frac{1}{2}-x} = 3^{\frac{3}{2}-x} - 2^{1-2x}.$

283. $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 4.$

284. $\log_a^2 x + 3 = 4\log_a x + 3\log_{ax}\frac{a}{x}.$

285. $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0.$

286. $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x.$

287. $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x.$

288*. $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}$.

289*. $(1+z^2+\operatorname{ctg}^2 x)^2+(2-z^2+\operatorname{tg}^2 x)^2=12+\frac{1}{2}\cos y$.

290. При каких значениях a система

$$\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ \dfrac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=a, \\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}=\operatorname{tg}15^\circ \end{cases}$$

совместна?

§ 20. Функции и графики

291. Построить график функции

$$y=||x-1|-x|.$$

292. Прямоугольные координаты точки удовлетворяют уравнениям:

1) $|x|+|y|=3$;
2) $|x|-2|y|=1$.

Построить соответствующие этим уравнениям геометрические места точек.

293. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 3+x, & x\leqslant 0, \\ 3-x, & x>0. \end{cases}$$

Найти функцию $f(f(x))$ и построить ее график.

294. Доказать, что функция

$$y=x+\sin x$$

возрастающая.

295. Доказать, что функция

$$f(x)=\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos 40x$$

принимает как положительные, так и отрицательные значения.

296. Найти области определения функций:

1) $y=\sqrt{\cos x-\operatorname{ctg} x}$;
2) $y=\sqrt{3\cos x-2\cos^2 x-1}$.

297. Найти периоды функций:

1) $y=2\sin 15x+3\sin 10x$;

2) $y=\sin 3x+\operatorname{tg}\frac{2x}{5}$;

3) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

4) $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

298. Найти области определения и построить графики функций:

1) $y=\lg\frac{1-x}{x}$;

2) $y=\frac{1}{\lg(x-2)}$.

299. Функция $f(n)$ определена для натуральных значений n и удовлетворяет условиям

$$f(n)=f(n-1)+a^n,\quad f(1)=1.$$

Найти $f(n)$.

§ 21. Наибольшие и наименьшие значения функции

300. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{x-1}{x^2-3x+3}.$$

301. Найти наименьшее значение функции

$$y=\frac{x^5+16}{x},\quad x>0.$$

302. Найти наибольшее значение функции

$$y=\frac{3x^2}{ax^4+bx^2+c},\quad a>0,\ b>0,\ c>0.$$

303. Найти наименьшее значение функции

$$y=\frac{4}{x}+\frac{1}{1-x},\quad 0<x<1.$$

304. Вычислить наименьшее значение функции

$$z=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2, \quad x>0, \; y>0, \; x+y=1.$$

305. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y=x^2(3x-1)^2.$$

306. Найти наименьшее значение функции

$$z=2x^2+5xy+2x-6y+7.$$

307. Найти наименьшее значение функции

$$y=\frac{1}{x}(x^3-5x^2+10x+9), \quad x>0.$$

308. Найти наибольшее значение функции

$$y=3\sin x+3\cos x-4\sin x\cos x.$$

309. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x.$$

§ 22. Метод математической индукции

310. Доказать тождество

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

311. Доказать, что если n и p — натуральные числа, причем p — простое число, то разность n^p-n делится на p.

312. Доказать, что при любом целом $n\geqslant 0$ сумма $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

313. Доказать, что

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin nx=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

314. Доказать, что

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\sin\frac{nx}{2}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

§ 23. Геометрические приложения комплексных чисел

315. Три точки A, B и C принадлежат одной прямой. Доказать, что если этим точкам соответствуют комплексные числа a, b и c, то

$$\frac{a-b}{a-c}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{c}}$$

($\bar{a}$ есть комплексное число, сопряженное с a).

316. Дан равносторонний треугольник ABC. Доказать, что если он ориентирован положительно (обход по его сторонам от A к B и далее к c совершается против движения часовой стрелки), то

$$a+\alpha b+\alpha^2 c=0,$$

где $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, а a, b и c — комплексные числа, соответствующие точкам A, B и C.

317. Центр окружности совпадает с началом координат. Доказать, что если хорды AB и CD этой окружности параллельны, то $ab=cd$, где a, b, c, d — комплексные числа, соответствующие концам хорд.

318. Доказать, что если хорды AB и CD окружности, центр которой совпадает с началом координат, перпендикулярны, то $ab+cd=0$.

319. В окружность, центр которой совпадает с началом координат, вписан треугольник ABC. Доказать, что

$$h=a+b+c,$$

где h — комплексное число, соответствующее точке пересечения высот треугольника, а a, b и c — его вершинам.

320. Центр окружности находится в начале координат. Касательные к этой окружности в точках A и B пересекаются в точке C. Доказать, что

$$c=\frac{2ab}{a+b},$$

где a, b, c — комплексные числа, соответствующие точкам A, B и C.

321. Центр окружности находится в начале координат. Из точки C, расположенной на окружности, опущен перпендикуляр CD на хорду AB. Доказать, что

$$d=\frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ab}{c}\right),$$

где a, b, c, d — комплексные числа, соответствующие точкам A, B, C, D.

Ответы и указания к решению

1. Пусть данные прямые пересекаются. Построить прямую, симметричную одной из данных прямых, приняв данную точку за центр симметрии. Точка ее пересечения с другой прямой есть конец отрезка искомой прямой.

2. Пусть данные прямые пересекаются. Построить прямую, гомотетичную одной из данных прямых (с коэффициентом гомотетии $m:n$ или $n:m$), приняв данную точку за центр гомотетии. Точка пересечения полученной прямой с другой данной прямой есть конец отрезка искомой прямой.

3. Через произвольную точку N, лежащую на l, провести секущую t' так, чтобы $A'N:NB'=m:n$ (см. задачу 2). Прямая t, проходящая через M параллельно t', — искомая.

4. Построить плоскость, центрально симметричную одной из данных, приняв данную точку за центр симметрии. Полученная плоскость пересекает другую плоскость по прямой, принадлежащей искомой плоскости.

5. См. указания к решениям задач 2 и 4.

6. См. указания к решениям задач 3 и 5.

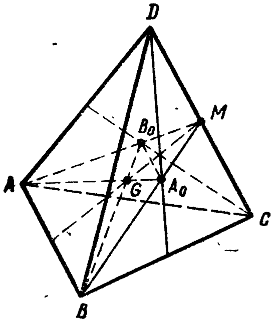
7. Отрезки AB и A_1B_1 параллельны, причем $AB:B_1A_1=$ $=2$. Точка пересечения G_0 отрезков AA_1 и BB_1 совпадает с G, так как $AG_0:G_0A_1=2$. Но тогда $BG:GB_1=2$.

Если точки A, B и C коллинеарны и точка B лежит между A и C, то: $AA_1=\frac{1}{2}(AB+AC)$ и $AG=\frac{2}{3}AA_1=$

$=\frac{1}{3}(AB+AC)$. Аналогичным образом имеем $AC_1=\frac{1}{2}AB$ и $\frac{CG}{GC_1}=\frac{AC-AG}{AG-AC_1}=\left(AC-\frac{1}{3}AB-\frac{1}{3}AC\right):\frac{1}{3}AB+\frac{1}{3}AC-$

$$-\frac{1}{2}AB=\frac{2AC-AB}{3}:\frac{2AC-AB}{6}=2.$$

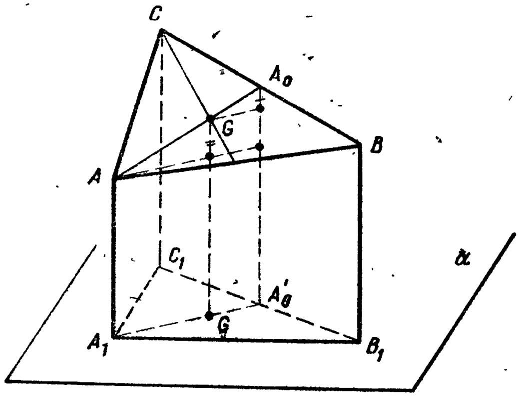
8. а) Заметить, что отрезки AA_0 и BB_0 пересекаются в некоторой точке G (черт. 1), причем $AG:GA_0=BG:GB_0=3:1$ (см. решение задачи 7).



Черт. 1

б) Рассмотреть трапецию ABA_0B_0 и учесть, что середины ее оснований, точка пересечения диагоналей AA_0 и BB_0 и точка пересечения продолжений боковых сторон AB_0 и A_0B расположены на одной прямой.

9. а) Если A_0—середина отрезка BC, A_0'—середина отрезка B_1C_1 (черт. 2), то $A_0A_0'=\frac{1}{2}(BB_1+CC_1)$. Так как $(GG_1-AA_1):(A_0A_0'-GG_1)=2$, то $3GG_1=AA_1+2A_0A_0'=AA_1+BB_1+CC_1$.



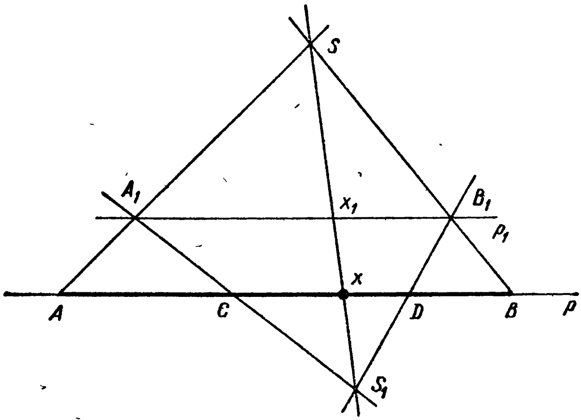
Черт. 2

б) Если A и B находятся по одну сторону плоскости, C—по другую сторону, то $3GG_1=|AA_1+BB_1-CC_1|$.

10. См. указания к решениям задач 8 и 9.

11. Провести прямую p_1, параллельную p. Из точки S

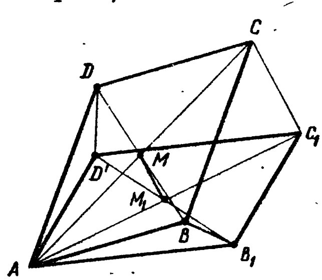
спроектировать A и B в точки A_1 и B_1 на p_1 (черт. 3). Если прямые A_1C и B_1D пересекаются в точке S_1, то прямая SS_1 пересекает p в искомой точке X. Если точка X существует, то она единственная. В самом деле, $\overline{AX}:\overline{XB}=$ $=\overline{CX}:\overline{XD}=\overline{A_1X_1}:\overline{X_1B_1}$.



Черт. 3

12. Если M и M_1 — центры симметрии параллелограммов, то прямые BB_1, DD_1 и MM_1 параллельны одной плоскости (черт. 4). Остается заметить, что $MM_1 \parallel CC_1$.

13. Пусть M и M_1 — середины отрезков AB и A_1B_1. Прямые AA_1, BB_1 и MM_1 параллельны одной плоскости (см. задачу 12). Кроме того, $MM_1 \parallel CC_1$ (см. задачу 7).



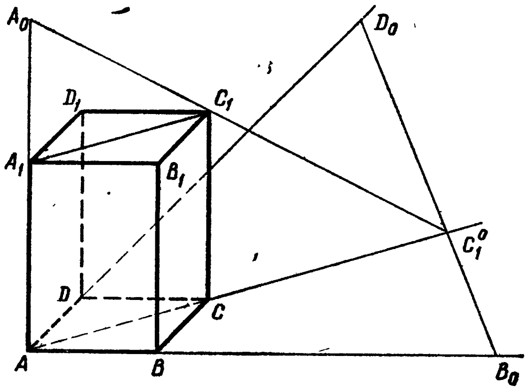
Черт. 4

14. Через P_2 провести плоскость параллельно прямым P_1Q_1 и P_3Q_3, пересекающую Q_1Q_3 в точке Q_2.

15. Очевидно, $AB:AB_1=D_1C:D_1B_1$, $AD:AD_1=$ $=CB_1:D_1B_1$, откуда и следует доказываемое равенство.

16. Провести через C прямую p_1, параллельную p (см. задачу 15).

17. Провести плоскость ACC_1A_1 и прямую A_0C_1 (см. задачи 15 и 16). Рассмотреть параллелограммы $ABCD$, ACC_1A_1 и соответственно прямые B_0D_0, $A_0C_1^0$ (черт. 5).



Черт. 5

18. Провести через вершину C_1 плоскость α_1, параллельную α (см. задачу 17).

19. Разделить обе части данного равенства на 3. Построить точки M_0 и N_0, чтобы $CA=3CM_0$, $CB=3CN_0$ (см. задачу 15).

20. Разделить обе части данного равенства на 4 (см. задачи 8, 17, 19). Дополнить тетраэдр до параллелепипеда. Если DS его диагональ, то $DS=4DG$. Провести через S плоскость α_1 так, чтобы $\alpha_1 \parallel \alpha_2$.

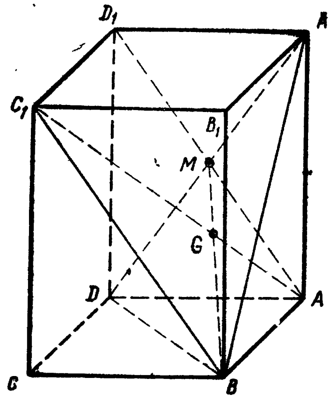
21. Провести медиану CC_1 треугольника ABC и продолжить ее за точку C_1 до точки C_0 так, чтобы $CG=GC_0$ (G — центроид треугольника). Медианы треугольника ABC параллельны сторонам треугольника GC_0B или принадлежат прямым, содержащим стороны этого треугольника.

22. Дважды воспользоваться решением задачи 11, фиксируя прямую BB_1 и поочередно присоединяя к ней прямые AA_1 и CC_1.

23. Провести плоскость ABC_1 и доказать, что она проходит через середину M отрезка DA_1 (черт. 6). Этим доказывается, что диагональ AC_1 пересекает все три медианы треугольника A_1BD. Так как $BG:GM=2:1$, то $AC_1=3AG$.

24. Построить на полупрямой AM точку C_1, такую, чтобы $AC_1=3\cdot AM$, приняв ее за вершину параллелепипеда (см. задачу 23).

25. В общем случае середины отрезков расположены внутри параллелограмма, имеющего вершины в серединах сторон BC и DA и в серединах диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$.



Черт. 6

26. Плоскости параллелограммов параллельны диагоналям косого четырехугольника, и поэтому они параллельны между собой. Искомое геометрическое место точек есть отрезок прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.

27. Плоскость, параллельная прямым m и n. Построить одну точку искомого геометрического места.

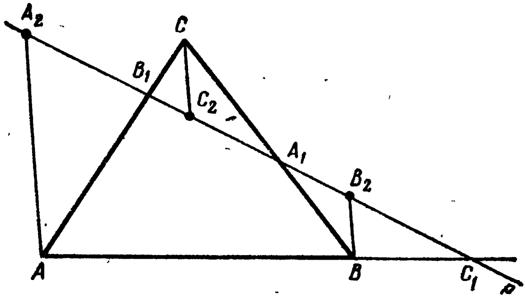
28. Построить прямые пересечения m и n плоскостей противоположных граней четырехгранного угла. Провести плоскость, параллельную m и n.

29. Построить прямую m, по которой пересекаются плоскости противоположных граней α и γ четырехгранного угла. В этих гранях построить отрезки (с концами на ребрах), параллельные прямой m так, чтобы их отношение было равно данному отношению. Положение одного из отрезков произвольно.

30. Через данную точку провести плоскость, параллельную двум противоположным ребрам тетраэдра.

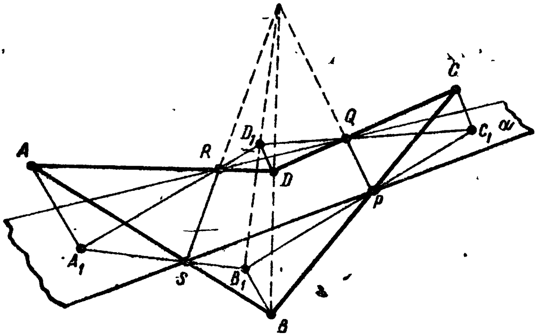
31. Через точки A, B, C провести параллельные прямые, пересекающие p в точках A_2, B_2, C_2 (черт. 7). Заменить отношения отрезков, указанных в условии задачи, равными отношениями, составленными из отрезков AA_2, BB_2, CC_2. Обратная теорема верна.

32. Пересечь прямую p одной из диагоналей четырехугольника и применить дважды теорему Менелая (см. задачу 31). Обратная теорема не верна.



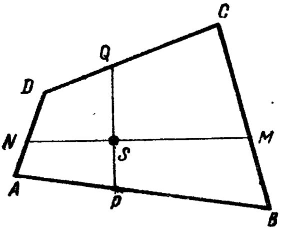
Черт. 7

33. Через точки A, B, C, D провести параллельные прямые, пересекающие α в точках A_1, B_1, C_1, D_1 (черт. 8). Заменить отношения, указанные в задаче, равными отношениями, составленными из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1.



Черт. 8

Обратная теорема верна. Отдельно рассмотреть случаи, когда плоскость α параллельна одной или двум сторонам (или диагоналям) четырехугольника.



Черт. 9

34. Применить к косому четырехугольнику $ABCD$ (черт. 9) обратную теорему Менелая (см. задачу 33).

35. Провести прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный внутри угла, делился точкой M пополам (см. задачу 1).

36. Принять плоскость одной из граней трехгранного угла за плоскость оснований двух тетраэдров и применить формулу объема тетраэдра.

37. Провести через M плоскость α так, чтобы в треугольном сечении $A_1A_2A_3$ точка M была центроидом (см. задачу 24). Пусть плоскости, проведенные через M параллельно граням трехгранного угла, пересекают ребра в точках M_1, M_2, M_3. Если $V_M(SM_1M_2M_3)$, $V_A(SA_1A_2A_3)$—объемы тетраэдров $SM_1M_2M_3$ и $SA_1A_2A_3$, то, очевидно, $V_M:V_A=\frac{1}{27}$. Пусть плоскость β пересекает ребра трехгранного угла в точках B_1, B_2, B_3. Тогда $V_M:V_B=\frac{SM_1}{SB_1}\cdot\frac{SM_2}{SB_2}\cdot\frac{SM_3}{SB_3}$, $V_B=V(SB_1B_2B_3)$ (см. задачу 36). Далее,

$$\frac{SM_1}{SB_1}+\frac{SM_2}{SB_2}+\frac{SM_3}{SB_3}=1$$

(см. задачу 17). Поэтому $\frac{SM_1}{SB_1}\cdot\frac{SM_2}{SB_2}\cdot\frac{SM_3}{SB_3}\leqslant\frac{1}{27}$ (по теореме Коши о связи среднего арифметического и среднего геометрического).

Итак,

$$\frac{V_M}{V_B}:\frac{V_M}{V_A}=\frac{V_A}{V_B}=27\cdot\frac{SM_1}{SB_1}\cdot\frac{SM_2}{SB_2}\cdot\frac{SM_3}{SB_3}\leqslant 1,$$

т. е. $V_A\leqslant V_B$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{SM_1}{SB_1}=\frac{SM_2}{SB_2}=\frac{SM_3}{SB_3}=\frac{1}{3}$. Это значит, что $\beta\equiv\alpha$.

38. Провести через M прямые, параллельные сторонам угла, и рассмотреть образовавшийся параллелограмм. Имеем:

$$\frac{1}{S(MOA)}+\frac{1}{S(MOB)}=\frac{2}{S(OA_1MB_1)},$$

где OA_1MB_1—параллелограмм (см. задачу 15).

39. I способ. Провести через точку M прямые, параллельные ребрам трехгранного угла O, пересекающие грани соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Тогда

$$\frac{V(OABC)}{V(OMAB)}=\frac{OC}{MC_1},\quad \frac{V(OABC)}{V(OMBC)}=\frac{OA}{MA_1},\quad \frac{V(OABC)}{V(OMCA)}=\frac{OB}{MB_1}.$$

Отсюда

$$\frac{V^3}{V(OMAB)\,V(OMBC)\,V(OMCA)}=\frac{OA\cdot OB\cdot OC}{MA_1\cdot MB_1\cdot MC_1}=\frac{V}{V_1},$$

где $V_1 = V(MA_1B_1C_1)$ (см. задачу 36). Заметить, что тетраэдры $OABC$ и $MA_1B_1C_1$ имеют равные трехгранные углы O и M. Итак,

$$\frac{V^3}{V(OMAB)\,V(OMBC)\,V(OMCA)} = \frac{1}{V_1}.$$

Объем V_1 не зависит от выбора плоскости (ABC).

II способ. Пусть h_1, h_2, h_3—высоты тетраэдров $OMBC$, $OMCA$, $OMAB$, опущенные на боковые грани данного трехгранного угла; тогда данное в условии задачи отношение λ можно представить так:

$$\lambda = \frac{6\cdot OA^2\cdot OB^2\cdot OC^2\cdot \sigma}{h_1\cdot h_2\cdot h_3\cdot OA^2\cdot OB^2\cdot OC^2\cdot \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},$$

где α, β, γ—плоские углы трехгранного угла и

$$\sigma = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Итак,

$$\lambda = \frac{6\sigma}{h_1h_2h_3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Очевидно, λ не зависит от положения плоскости α (см. задачу 92).

40. Если данные числа равны k_1, k_2, k_3, то $S(BCM):S(ABC) = k_1:(k_1+k_2+k_3)$. Разделив сторону AC точкой B_1 в отношении $CB_1:B_1A$, равном $k_1:(k_1+k_2+k_3)$, и проведя через B_1 прямую, параллельную BC, получим внутри треугольника отрезок этой прямой, которому принадлежит точка M. Построив аналогичным образом второй такой отрезок, найдем их точку пересечения, совпадающую с M.

41. Решение аналогично решению задачи 40.

42. Плоскости (a, M), (b, M), (c_1, M) пересекают грани соответственно по прямым a_1, b_1 и c_1. Если $S(MBC):S(MCA):S(MAB) = k_1:k_2:k_3$, то c_1 пересекает AB в точке C_1 так, что $AC_1:C_1B = S(MAC):S(MBC) = k_2:k_1$. Поэтому в грани (a, b) необходимо провести прямую так, чтобы она пересекла a, b, c_1 в точках A', B', C_1' и $A'C_1':C_1'B' = k_2:k_1$. Построение такой прямой рассмотрено в решении задачи 3. Аналогично строим прямую в другой грани трехгранного угла. Через M проводим плоскость, параллельную построенным прямым.

43. $\frac{1}{3}$.

44. Дополнить усеченную пирамиду до полной пирамиды. Учесть, что $S:S_1=h^2:h_1^2$, $S:S_2=h^2:h_2^2$, где h, h_1, h_2 — высоты соответствующих пирамид. Далее, $S^2:S_1S_2=$ $=h^4:h_1^2h_2^2$. Но $h=\frac{h_1+h_2}{2}>\sqrt{h_1h_2}$, $h^4>h_1^2h_2^2$. Следовательно, $S^2>S_1S_2$.

45. Доказать сперва справедливость утверждения задачи для двух треугольников, имеющих общую сторону; затем рассмотреть два треугольника, имеющих общую вершину. Перейти к общему случаю, сводя его вспомогательными треугольниками к первому.

46. Учесть, что

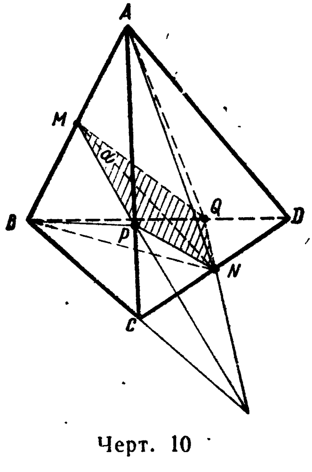
$$\frac{S(ABM)+S(BCM)+S(CAM)}{S(ABM)}=\frac{S(ABC)}{S(ABM)}=\frac{CC_1}{MC_1}.$$

Отсюда

$$\frac{S(BCM)+S(CAM)}{S(ABM)}=\frac{CC_1}{MC_1}-1=\frac{CM}{MC_1}.$$

47. Решение аналогично решению задачи 46.

48. Пусть плоскость α проходит через середину M ребра AB и середину N ребра CD и пересекает ребро AC в точке P, а ребро DB — в точке Q (черт. 10). Тетраэдр разбит на два пятигранника. Один из них можно разбить на тетраэдры $AMPN$, $AMQN$, $ADNQ$; другой — на тетраэдры $BMPN$, $BMQN$, $BCNP$. Но $V(AMPN)=$ $=V(BMPN)$, $V(AMQN)=V(BMQN)$. Далее устанавливаем, что $V(ADNQ)=V(BCNP)$. В самом деле, у этих тетраэдров равны ребра CN и DN и двугранные углы при этих ребрах. Поэтому их объемы относятся как произведение $S(NDQ)\cdot S(NDA)$ к произведению $S(CNP)\cdot S(CNB)$. Докажем, что эти произведения равны. По теореме Менелая (для косого четырехугольника $BADC$ и секущей плоскости α) имеем:



Черт. 10

$$\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DQ}{QB}=1,\quad \frac{AP}{PC}=\frac{BQ}{QD},$$

или $AC:PC=BD:QD$. Если из точек A, B, P и Q опустить на CD перпендикуляры AA_1, BB_1, PP_1 и QQ_1, то

$$AA_1:PP_1=BB_1:QQ_1.$$

Отсюда $AA_1 \cdot QQ_1 = BB_1 \cdot PP_1$, или $S(AND) \cdot S(QND) = S(CNB) \cdot S(CNP)$.

49. Разделив числитель и знаменатель дроби на $V(ABCD)$, получим

$$\frac{\frac{MD_1}{DD_1}+\frac{MC_1}{CC_1}}{\frac{MB_1}{BB_1}+\frac{MA_1}{AA_1}}=\frac{1-\frac{MQ}{PQ}}{1-\frac{MP}{QP}}=\frac{PM}{MQ}.$$

Здесь A_1, B_1, C_1, D_1 — точки пересечения прямых AM, BM, CM, DM с гранями.

50. Две прямые, проходящие через точку пересечения M прямых AB и CD. Для построения этих прямых перенести отрезки AB и CD параллельно в точку M. Рассмотреть случаи, когда прямые AB и CD параллельны или совпадают.

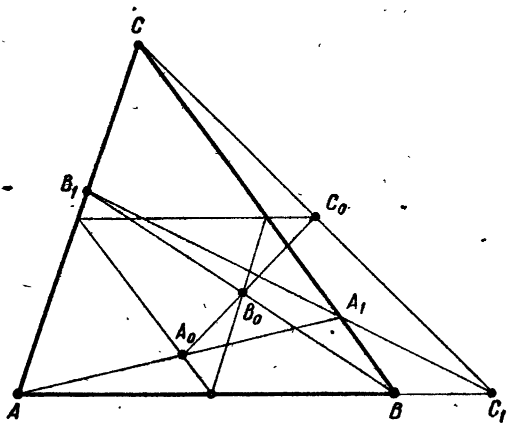
51. В данных плоскостях построить треугольники MNE и MNF, равновеликие треугольникам ABC и PQR (MN — прямая пересечения плоскостей). Плоскость, проходящая через MN и середину S отрезка EF, — искомая. В общем случае имеются две плоскости, но может быть одна, когда плоскости параллельны и данные треугольники равновелики.

52. См. решение задачи 51.

53. Через середину A_0 отрезка AA_1 провести среднюю линию данного треугольника. Аналогичным образом провести две другие средние линии (черт. 11). На сторонах полученного треугольника находятся середины A_0, B_0 и C_0 отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Далее, воспользоваться обратной теоремой Менелая и убедиться, что точки A_0, B_0 и C_0 принадлежат одной прямой. Иметь в виду, что

$$\frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} \cdot \frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}}=-1.$$

54. Нет. Если же диагональ AC четырехугольника $ABCD$ делит диагональ BD пополам, то середина диагонали AC и есть точка M.



Черт. 11

55. Очевидно,

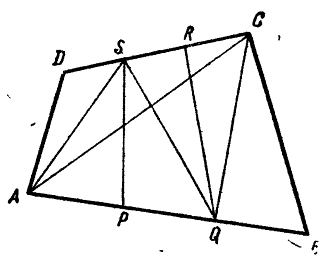
$$\sigma(ADS)=\frac{1}{3}\sigma(ADC),\ \sigma(CQB)=\frac{1}{3}\sigma(ABC),$$

где σ — знак площади (черт. 12). Следовательно,

$$\sigma(ADS)+\sigma(CQB)=\frac{1}{3}\sigma(ABCD).$$

Поэтому $\sigma(ASCQ)=\frac{2}{3}\sigma(ABCD)$. Но $\sigma(SRQ)=\sigma(RQC)$, $\sigma(SQP)=$ $=\sigma(SPA)$. Отсюда следует, что

$$\sigma(PQRS)=\frac{1}{3}\sigma(ABCD).$$



Черт. 12

56. См. решение задачи 55, учитывая, что противоположные стороны четырехугольника $PQRS$ разделены на 4 равные части.

57. См. решение задачи 55. Доказать, что каждый из четырех построенных отрезков разделен на три равные части.

58. См. решения задач 56 и 57.

59. Заметить, что $\sigma(ABCD)=\frac{1}{2}\sigma(SDQB)$. Далее, если

$$\sigma(ABC)=\alpha,\ \sigma(ADC)=\beta,\ \sigma(CQD)=\gamma,\ \sigma(SAB)=\delta,$$

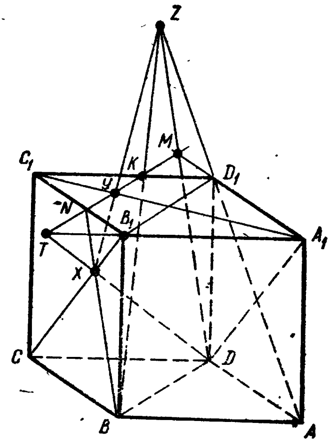
то

$$\sigma(PQRS)=\sigma(SDQB)+2(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=5\sigma(ABCD).$$

Учесть, что $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.

60. Установить, что отношение, в котором отрезок MN делит боковую сторону трапеции, убывает (считая от верхнего основания) по мере того, как прямая MN первоначально делит трапецию на равновеликие части, затем—боковые стороны пополам, далее—на подобные трапеции, наконец, когда MN проходит через точку пересечения диагоналей.

61. Воспользоваться теоремой Менелая для косого четырехугольника. Установить, что отношения соответствующих отрезков на скрещивающихся прямых одинаковы.



Черт 13

62. Через произвольную точку Z прямой AD_1 и прямую BD проведем плоскость α, пересекающую A_1C_1 в точке Y, а B_1C—в точке X (черт. 13). Необходимо доказать, что точки X, Y, Z принадлежат одной прямой. Если плоскость α пересекает прямую A_1D_1 в точке M, а прямую B_1C_1—в точке N, то, очевидно, $B_1N=D_1M$. Далее, плоскость α пересекает прямую A_1B_1 в точке T, поэтому DX и MN пересекаются в точке T на прямой A_1B_1. Диагональ B_1D_1 параллельна прямой MT, поэтому Y делит отрезок MT пополам. Наконец, применим теорему Менелая к треугольнику DMT, имея в виду, что

$$\frac{\overline{DX}}{\overline{XT}}=\frac{\overline{DZ}}{\overline{MZ}}.$$

Имеем:

$$\frac{\overline{DX}}{\overline{XT}}\cdot\frac{\overline{TY}}{\overline{YM}}\cdot\frac{\overline{MZ}}{\overline{ZD}}=\frac{\overline{DX}}{\overline{XT}}\cdot 1\cdot\left(-\frac{\overline{XT}}{\overline{DX}}\right)=-1.$$

Следовательно, точки X, Y, Z принадлежат одной прямой, пересекающей все четыре прямые.

63. Воспользоваться определением гомотетии и теоремой Менелая для треугольника. Коэффициент результирующей гомотетии равен произведению коэффициентов данных гомотетий. Если произведение равно 1, то получается перенос.

64. Воспользоваться решением задачи 63. Выполнить последовательно две гомотетии и вслед за полученной гомотетией выполнить третью гомотетию.

65. Рассмотреть шестиугольник с вершинами в серединах диагоналей четырехугольников. Заметить, что три стороны шестиугольника параллельны сторонам треугольника ABC (или $A_1B_1C_1$), а сумма шести векторов, определяемых сторонами шестиугольника, равна $\overline{0}$. Установить, что сумма векторов, соответствующих отрезкам, соединяющим середины диагоналей четырехугольников, равна $\overline{0}$.

66. См. задачу 46. Учесть, что

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S(BCM)}{S(ABM)}, \qquad \frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S(ACM)}{S(ABM)}.$$

67. См. решение задачи 66.

68. Установить, что

$$V(ABCD)=\frac{1}{6AB}S(ABC)\cdot S(ABD).$$

69. Прямая теорема общеизвестна. Для доказательства обратной теоремы находим из условия, что $AB+CD=$ $=AD+BC$. Пусть стороны четырехугольника имеют различную длину. Тогда можно полагать, что AB — наименьшая сторона, а CD — наибольшая. На BC строим точку M так, чтобы $AB=BM$; на CD строим точку N так, чтобы $MC=CN$. Тогда $MD=DA$. Центр окружности, описанной около треугольника AMN, совпадает с центром окружности, описанной около четырехугольника.

70. Установить, что сумма квадратов всех сторон четырехугольника равна сумме квадратов его диагоналей, увеличенной на учетверенный квадрат расстояния между серединами его диагоналей.

71. Вписать в окружность единичного радиуса правильный двенадцатиугольник. Тогда $r=\cos 15°$. Задача сводится к проверке равенства $\sin 15°+\cos 45°=\cos 15°$.

72. Провести диаметр AO и построить к нему перпендикулярную прямую, пересекающую AB, AC и AD соответственно в точках B_1, C_1, D_1. Убедиться, что $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1 = AD \cdot AD_1 = k$, вследствие чего $\triangle ABC \backsim \triangle AB_1C_1$, $\triangle ACD \backsim \triangle AC_1D_1$, $\triangle ADB \backsim \triangle AD_1B_1$. Отсюда

$$D_1C_1 = \frac{k}{AC \cdot AD} \cdot DC, \quad C_1B_1 = \frac{k}{AC \cdot AD} \cdot CB, \quad D_1B_1 = \frac{k}{AD \cdot AB} \cdot DB.$$

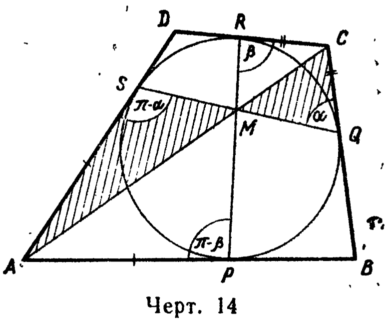
Но $D_1B_1 = D_1C_1 + C_1B_1$. После подстановки соответствующих значений получим $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$. Обратная теорема верна. Для доказательства строим на AB, AC, AD точки B_1, C_1, D_1, так, чтобы $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1 = AD \cdot AD_1$.

73. Применить теорему Птолемея (см. задачу 72) к четырехугольнику $A_1A_3A_4A_5$.

74. Пусть $\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$, $\angle CBA = \gamma$. Тогда $\alpha + \beta = \gamma$, или $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. В том и другом случае $\cos(\alpha + \beta) = \cos\gamma$, $(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \cos\gamma)^2 = (1 - \cos^2\alpha)(1 - \cos^2\beta)$. После преобразований получаем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Далее воспользоваться теоремой косинусов. Зависимость представляет собой однородное уравнение шестой степени от шести неизвестных, пять из которых (с определенными ограничениями) независимы.

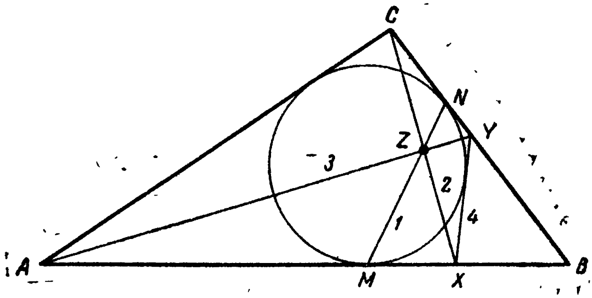


Черт. 14

75. Провести отрезки, соединяющие точки касания на противоположных сторонах (черт. 14). Доказать, что диагональ четырехугольника пересекает эти отрезки в их общей точке. Воспользоваться теоремой синусов и свой-

ствами углов, образуемых касательной и хордой окружности, проведенными из одной точки.

76. Воспользоваться теоремой, составляющей содержание задачи 75. Провести поочередно прямые 1, 2, 3. Прямая 4 — искомая касательная (черт. 15).



Черт. 15

77. Данное в условии задачи соотношение привести к виду

$$\sin\left(60^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}-30^\circ\right):\sin\left(\frac{B}{2}-30^\circ\right)=0.$$

78. Из условия задачи следует: $a^2+b^2=5c^2$. Далее,

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4a^2+4b^2}{10ab}.$$

Отсюда

$$4a^2-10ab\cos C+4b^2=0,$$

или

$$4k^2-10\cos C\cdot k+4=0,$$

где $k=a:b$. Вычисляем дискриминант: $\Delta=25\cos^2 C-16$. Поскольку $\Delta\geqslant 0$, то $\cos^2 C\geqslant\frac{16}{25}$, $\sin^2 C\leqslant\frac{9}{25}$ и $\sin C\leqslant\frac{3}{5}$.

79. Если $P\to P'$ в симметрии с центром A, а $P'\to P''$ в симметрии с центром B, то $\overline{PP''}=2\overline{AB}$, где P — любая точка плоскости. Это следует из свойств средней линии треугольника.

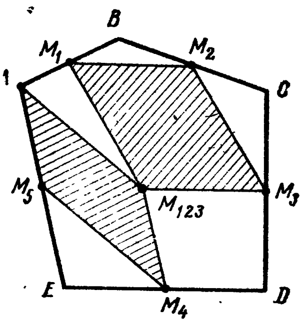
80. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Результат выполнения симметрий относительно A и B переводит P в P'', причем $\overline{PP''}=2\overline{AB}$. Далее, результат выполнения симметрий относительно C и D переводит P'' в $P^{(IV)}$,

причем $\overline{P''P^{(IV)}}=2\overline{CD}$. Но $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{0}$. Поэтому $\overline{PP''}+\overline{P''P^{(IV)}}=\overline{0}$ или $\overline{PP^{(IV)}}=\overline{0}$, т. е. $P\equiv P^{(IV)}$. Итак, каждая точка P после четырех центральных симметрий преобразуется в себя. Это значит, что результат выполнения четырех указанных симметрий есть тождественное преобразование.

81. Если A, B и C—данные центры симметрии, то, построив точку D так, чтобы $ABCD$ был параллелограмм, установим, что результат последовательного выполнения четырех симметрий относительно A, B, C и D есть тождественное преобразование. Следовательно, результат последовательного выполнения трех симметрий относительно A, B и C есть симметрия относительно точки D.

82. Первые три симметрии заменяем одной (см. задачу 81). Продолжая этот процесс, получаем в первом случае (после конечного числа замен) две симметрии, результат выполнения которых есть перенос или тождественное преобразование. Во втором случае приходим к одной симметрии.

83. Первая вершина A искомого пятиугольника есть центр симметрии, получаемой в результате последовательного выполнения пяти симметрий относительно данных пяти точек M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5, принимаемых за центры симметрии (черт. 16). Поэтому заменяем первые три симметрии M_1, M_2, M_3 одной—M_{123}, а затем оставшиеся три симметрии—снова одной. Центр последней симметрии и есть искомая вершина A пятиугольника.



Черт. 16

84. Если данные шесть точек служат серединами сторон некоторого шестиугольника, то последовательное выполнение шести симметрий относительно этих точек есть тождественное преобразование, так как первая вершина при этом переходит в себя. Но тогда любая точка плоскости может быть принята за первую вершину шестиугольника, для которого данные шесть точек в заданном порядке служат серединами его сторон.

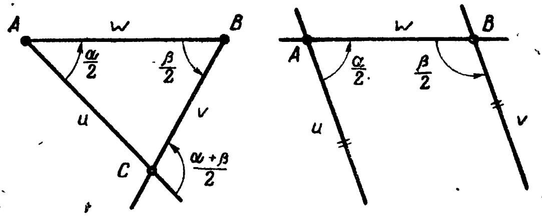
85. Если оси симметрии a и b пересекаются, то результат последовательного выполнения указанных осевых симметрий есть вращение около точки пересечения M данных осей на удвоенный ориентированный угол между прямыми a и b. В случае, когда $a \perp b$, результат последовательного выполнения данных симметрий не зависит от порядка их выполнения и представляет собой центральную симметрию относительно точки M.

Если оси параллельны, то получаем перенос на вектор, перпендикулярный к данным осям, направленный от первой оси ко второй, причем модуль вектора переноса равен удвоенному расстоянию между осями.

86. Пусть оси симметрии a, b и c пересекаются в точке M. Построим прямую d, проходящую через M, такую, чтобы $\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \angle(\bar{d}, \bar{c})$, где $\angle(\bar{a}, \bar{b})$—ориентированный угол между осями a и b. Результат последовательного выполнения данных трех симметрий есть симметрия относительно оси d, так как результат последовательного выполнения осевых симметрий относительно осей a, b, c и d есть тождественное преобразование. Аналогичное рассуждение проводится и для трех параллельных осей. Обратно, пусть последовательное выполнение симметрий относительно осей a, b и c есть симметрия относительно оси d. Это значит, что произведение четырех симметрий относительно осей a, b, c и d есть тождественное преобразование. Но тогда преобразование вращения (или переноса), определяемое симметриями относительно a и b, противоположно вращению (или переносу), определяемому симметриями относительно c и d. Иначе, вращения (или переносы), определяемые симметриями относительно a и b и симметриями относительно d и c, совпадают. Поэтому все четыре оси или проходят через одну точку, или параллельны.

87. Пусть первое вращение задано центром A и углом α, а второе—центром B и углом β (черт. 17). Проведем прямую $AB \equiv \omega$ и построим прямую u, проходящую через A такую, чтобы $\angle(\bar{u}, \bar{\omega}) = \frac{\alpha}{2}$, и прямую v, проходящую через B такую, чтобы $\angle(\bar{\omega}, \bar{v}) = \frac{\beta}{2}$. Результат последовательного выполнения данных вращений совпадает с результатом последовательного выполнения симметрий относительно прямых u, w, w, v. Итак, получаем вращение

около точки пересечения прямых u и v на угол $2\angle(\bar{u}, \bar{v})$, равный $\alpha+\beta$. Если прямые u и v параллельны, то получаем перенос.



Черт. 17

88. См. задачу 87. Вращение следует представить как результат последовательного выполнения двух симметрий, одна из осей которых параллельна осям симметрии, определяющим данный перенос.

89. См. задачу 86. Воспользоваться методом от противного. Пусть оси a, b и c пересекаются, образуя треугольник ABC. Вершина C преобразуется в результате последовательного выполнения симметрий относительно a, b и c в точку C', симметричную C относительно прямой c. Выполняя осевые симметрии в обратном порядке, обнаружим, что точка C не переходит в точку C'. Аналогично опровергается и второй возможный случай расположения осей a, b и c, когда две из них параллельны, а третья их пересекает.

90. Точки A и B симметричны относительно прямой m. Представить каждую центральную симметрию как результат последовательного выполнения двух осевых симметрий, одна из осей которых параллельна прямой m, а другая ей перпендикулярна. Убедиться, что прямые, проходящие через A и B перпендикулярно к m, совпадают.

91. Расположим трехгранные углы $Sabc$ и $S'a'b'c'$ так, чтобы совпали ребра a и a', b и b'. Пусть двугранный угол при ребре a больше двугранного угла при ребре a'. Проводим биссектрису угла (c, c') и через нее и ребро a проведем плоскость σ. В силу равенства углов (a, c) и (a', c') плоскость σ пересечет грань (b, c) по лучу d. Рассмотрим трехгранный угол $Sbc'd$.

Очевидно,

$$\angle(b, c') < \angle(b, d) + \angle(d, c') = \angle(b, d) + \angle(d, c) = \angle(b, c).$$

Итак, плоский угол, противолежащий ребру a', меньше плоского угла, противолежащего ребру a.

92. Пусть $BC=a, CA=b, AB=c, \angle BSC=\alpha, \angle CSA=\beta, \angle ASB=\gamma$. Тогда $a^2=2(1-\cos\alpha)$, $b^2=2(1-\cos\beta)$, $c^2=2(1-\cos\gamma)$. Далее, если S — площадь треугольника ABC, а R — радиус описанной около него окружности, то

$$v^2=\frac{1}{9}S^2\cdot h^2=\frac{1}{9}S^2(1-R^2)=\frac{1}{9}S^2\left(1-\frac{a^2b^2c^2}{16S^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{144}(16S^2-a^2b^2c^2).$$

Но согласно формуле Герона имеем:

$$16S^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

Итак,

$$v^2=\frac{1}{144}(2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4-a^2b^2c^2).$$

Подставив сюда значения для a^2, b^2 и c^2, получим:

$$v^2=\frac{1}{36}(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

93. Отложим на ребрах трехгранного угла от вершины S отрезки SA, SB и SC, равные 1. Квадрат объема тетраэдра $SABC$ вычисляется по формуле: $36v^2=1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ (см. задачу 92). С другой стороны,

$$v^2=\frac{1}{9}\sigma^2_{SAB}\cdot h^2=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}\sin^2\gamma\cdot h_1^2\sin^2 A=\frac{1}{36}\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\sin^2 A,$$

где h_1 — высота треугольника SAC, опущенная из вершины C на AB. Следовательно, $1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2 A$. Отсюда

$$1-\sin^2 A=\cos^2 A=\frac{(\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma)^2}{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}$$

$$\cos A=\pm\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Знак минус следует отбросить, так как при сохранении β и γ и увеличении α должен увеличиться и угол A (см. задачу 91). Поэтому

$$\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Для вывода полученной формулы нет необходимости пользоваться формулой объема тетраэдра. Достаточно лишь установить, что $\sigma_{ABC}\cdot h_S=\sigma_{SAB}\cdot h_C$. В самом деле, построив высоты SD и CE в гранях SAB и ABC, находим $\sin\varphi=h_S:SD=h_C:CE$, где φ — двугранный угол при ребре AB. Поэтому $h_S:(AB\cdot SD)=h_C:(AB\cdot CE)$, или $\sigma_{ABC}\times h_S=\sigma_{SAB}\cdot h_C$.

94. Из теоремы косинусов следует, что

$$\cos^2 A=1-\sin^2 A=\frac{\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\beta\cos^2\gamma}{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}.$$

Отсюда

$$\sin^2 A=\frac{\sin^2\beta\sin^2\gamma-\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\beta\cos^2\gamma}{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma},$$

или

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha}=\frac{1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)+2\cos\alpha\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2\beta}=\frac{\sin^2 C}{\sin^2\gamma},$$

или

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\sin B}{\sin\beta}=\frac{\sin C}{\sin\gamma}=\frac{v}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma},$$

где v — объем тетраэдра с ребрами SA, SB, SC, равными 1, и плоскими углами α, β и γ при вершине S.

95. Установить, что

$$\cos A-\cos B=\frac{[\cos(\alpha+\beta)-\cos\gamma]\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Но $\alpha+\beta>\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma<2\pi$. Поэтому $\cos(\alpha+\beta)<\cos\gamma$. Если $\cos A=\cos B$, то $\sin(\alpha-\beta)=0$. Отсюда, из $A=B$ вытекает $\alpha=\beta$ и обратно.

96. Согласно теореме косинусов двугранные углы трехгранных углов соответственно равны и оба трехгранных угла равны по двум плоским углам и заключенному между ними двугранному углу.

97. Заметить, что по теореме косинусов плоские углы трехгранного угла связаны соотношением $\cos\alpha=\cos\beta\times\times\cos\gamma$, если $A=90°$. Поэтому

$$\cos\alpha=\cos(\gamma-y)\cos x,\quad \cos\beta=\cos y\cdot\cos\alpha,$$

где x — искомый угол, а y — угол между проекцией ребра c на плоскость (a, b) и ребром a.

Решая систему, получаем:

$$\cos^2 x=\frac{1}{\sin^2\gamma}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma),$$

или

$$\sin^2 x=\frac{1}{\sin^2\gamma}(1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma).$$

98. Доказать, что

$$\sigma=\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cdot\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\cos\beta-\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}=1.$$

В самом деле,

$$\sigma=-(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha)+\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=-1+\frac{4}{2}=1,$$

так как при $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ имеем:

$$\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1,\quad \sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

99. Применить теорему Менелая для трехгранного угла.

100. Через точку A ребра a трехгранного угла $Sabc$ в грани (a, b) провести прямую, перпендикулярную ребру c, пересекающую ребро b в точке B. Через B в грани (b, c) провести прямую, перпендикулярную ребру a, пересекающую ребро c в точке C. Из вершины S опустить на плоскость ABC перпендикуляр SH. Установить, что H — ортоцентр треугольника ABC, а плоскости (a, SH), (b, SH), (c, SH) удовлетворяют условию задачи.

101. См. решение и обозначения задачи 100. Плоскость, проведенная через вершину S трехгранного угла параллельно плоскости ABC, искомая.

102. Воспользоваться теоремой косинусов для трехгранного угла для случая, когда двугранный угол трехгранного угла прямой.

103. Заметить, что задача имеет решение, если данные три точки A, B, C являются вершинами остроугольного треугольника. Вершина S искомого трехгранного угла принадлежит перпендикуляру к плоскости треугольника, проходящему через ортоцентр H треугольника. Далее, если плоскость SAH пересекает BC в точке A_1, то $SH^2 =$ $= AH \cdot HA_1$ и $SH = \sqrt{AH \cdot HA_1}$.

104. Воспользоваться формулой Герона в раскрытом виде:

$$16s^2 = 2m^2n^2 + 2n^2p^2 + 2p^2m^2 - m^4 - n^4 - p^4,$$

где m, n, p — стороны треугольника, s — его площадь.

105. На полупрямой d выбрать произвольную точку D и провести через нее плоскости, параллельные граням трехгранного угла. Если m, n и p — длины ребер полученного прямоугольного параллелепипеда, то $DS^2 = m^2 + n^2 + p^2$ и

$$\left(\frac{m}{DS}\right)^2 + \left(\frac{n}{DS}\right)^2 + \left(\frac{p}{DS}\right)^2 = 1,$$

или

$$\cos^2(\widehat{a, d}) + \cos^2(\widehat{b, d}) + \cos^2(c, d) = 1.$$

106. Рассмотреть три трехгранных угла $Sabd$, $Sbcd$, $Scad$. Выразить по теореме косинусов их двугранные углы при ребре d через плоские углы. Учесть, что сумма указанных двугранных углов или равна 2π, или сумма двух двугранных углов равна третьему.

107. Пересечь трехгранные углы плоскостью α, параллельной прямой SS_1. В сечении получаются два треугольника, соответствующие вершины которых расположены на трех параллельных прямых. Соответствующие стороны этих треугольников пересекаются в трех точках, принадлежащих одной прямой p (см. задачу 22). Прямая p пересекает все три прямые, по которым пересекаются соответствующие грани трехгранных углов. Далее, менять положение плоскости α и убедиться в том, что существуют хотя бы две пересекающиеся прямые p_1 и p_2 с указанным свойством.

108. Применить дважды теорему синусов для трехгранного угла.

109. Две плоскости, если данные плоскости пересекаются; одна плоскость, если данные плоскости параллельны.

110. Две плоскости, если данное отношение отлично от единицы. Если отношение равно единице, то могут быть две плоскости и одна.

111. Две плоскости, если данные прямые пересекаются; одна плоскость, если данные прямые параллельны.

112. См. решение задачи 110.

113. Окружность, если $d_1+d_2>AB$; точка, если d_1+ $+d_2=AB$; точек не существует, если $d_1+d_2<AB$.

114. Если отношение k отлично от единицы, то геометрическое место точек есть сфера; если $k=1$, то имеем плоскость.

115. Окружность или прямая (см. задачу 114).

116. Если A и B — данные точки, а постоянная равна k^2, то $PA^2+PB^2=k^2$. Отсюда $PM^2=\frac{1}{2}(PA^2+PB^2)-$ $-\frac{1}{4}AB^2$, где PM — медиана треугольника ABP. Итак, $PM^2=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{4}AB^2$. Если $k^2>\frac{1}{2}AB^2$, то искомое геометрическое место точек есть сфера с центром в середине отрезка AB.

117. См. задачу 116. Искомое геометрическое место точек есть сфера с центром в центроиде треугольника ABC (A, B, C — данные три точки).

118. Доказать, что на прямой g, проходящей через данные две точки A и B, имеется только одна точка M_0 искомого геометрического места и что искомая плоскость α перпендикулярна к g и проходит через M_0. Положение точки M_0 зависит от данной постоянной.

119. Провести три пары биссекторных плоскостей. Геометрическое место точек — четыре прямые.

120. Построить плоскости симметрии трех пар прямых, составленных из данных трех прямых. Искомое геометрическое место точек — четыре прямые.

121. Искомое геометрическое место — четыре прямые, являющиеся осями четырех круговых конических поверхностей, проходящих через данные три прямые.

122. Круговая коническая поверхность или плоскость.

123. Круговая цилиндрическая поверхность.

124. Круговая коническая поверхность.

125. Два пучка прямых, расположенных в плоскостях, параллельных прямой пересечения плоскостей и перпендикулярных плоскостям симметрии данных плоскостей.

126. Все плоскости, параллельные прямой AB, и все плоскости, проходящие через середину отрезка AB.

127. Плоскости, касающиеся круговой конической поверхности, или одна плоскость, перпендикулярная данной прямой.

128. См. решение задачи 127.

129. Воспользоваться теоремой синусов для трехгранного угла.

130. Провести диагональ косого четырехугольника и воспользоваться свойствами плоских углов трехгранного угла.

131. Дополнить треугольник PAB до параллелограмма.

132. См. решение задачи 131.

133. Разделить отрезок AA_1 (A_1—середина BC) на три равные части (см. задачу 131).

134. Заметить, что центроид четырехугольника совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины его диагоналей (см. задачу 131).

135. См. решение задачи 116.

136. См. решение задачи 117.

137. Выразить квадрат расстояния от точки пространства до центроида G тетраэдра $ABCD$ через квадраты расстояний данной точки до вершины тетраэдра и через квадраты ребер тетраэдра:

$$PG^2=\frac{1}{4}(PA^2+PB^2+PC^2+PD^2)-\frac{1}{16}(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2).$$

Отсюда

$$(PA^2+PB^2+PC^2+PD^2)_{\min}=\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2) \text{ при } P\equiv G.$$

138. Построить точку A', симметричную A относительно α. Прямая $A'B$ пересекает α в искомой точке P.

139. Искомая точка совпадает с точкой пересечения прямой AB' с плоскостью α, где B' есть точка, симметричная B относительно плоскости α.

140. Построить полупрямую OB', симметричную полупрямой OB относительно α. Плоскость AOB' пересекает α по прямой, содержащей искомую полупрямую.

141. Пусть противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ равны соответственно a и c, b и d, e и f. Проводим сферу через вершины A, B и C, пересекающую ребра DA, DB и DC (или их продолжения) соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Выразить отношения $A_1B_1:B_1C_1:C_1A_1$ через ребра тетраэдра. Учесть подобие трех пар треугольников.

142. Если $AB\perp CD$, то доказательство опирается на теорему Пифагора. Обратная теорема доказывается методом от противного. Из точек C и D опускаются перпендикуляры на AB и устанавливается совпадение их оснований.

143. Провести два перпендикуляра из середин противоположных сторон и убедиться, что их точка пересечения симметрична центру окружности, описанной около четырехугольника, относительно его центроида. Заметить, что центроид совпадает с серединой средней линии четырехугольника.

144. Искомая точка симметрична центру описанной сферы относительно центроида тетраэдра.

145. Воспользоваться теоремой Пифагора (см. задачу 142).

146. См. решение задачи 142.

147. Убедиться, что противоположные ребра тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны: $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

148. Восставить к плоскости треугольника ABC в точке P перпендикуляр PQ. Рассмотреть трехгранный угол $Q(ABC)$ (см. задачу 101).

149. См. задачу 142.

150. См. задачу 145.

151. Воспользоваться решением задачи 145.

152. Воспользоваться теоремой косинусов для трехгранного угла с прямым двугранным углом.

153. Рассмотреть трехгранный угол, образованный плоскостями (b, c), (c, a) и (a, b) (см. задачу 100).

154. Соединить центр правильного тетраэдра с его вершинами; $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$.

155. Соединить центр прямоугольного параллелепипеда с концами двух его непараллельных диагоналей, расположенных в параллельных гранях.

156. Секущая плоскость параллельна двум противоположным ребрам тетраэдра. Положение этой плоскости определяется из условия равенства всех сторон ромба.

157. Задача имеет решение, когда плоскость β параллелограмма $ABCD$ не параллельна плоскости проекций α. Пусть $\alpha \times \beta \equiv m$. Если AB и AD пересекают m в точках B_1 и D_1, то всевозможные параллельные проекции A_1 вершины A расположены на окружности ω_1 диаметра B_1D_1, а всевозможные параллельные проекции M_1 центра M параллелограмма — на окружности ω_2, гомотетичной ω_1, с центром гомотетии в точке $S \equiv AC \times m$ и коэффициентом

$k = SM:SA$. Если $BD \times m \equiv T$, то окружность диаметра ST пересечет окружность ω_2 в искомой точке M_1.

158. Если данные плоскости пересекаются, то они имеют две плоскости симметрии. Всякая плоскость, перпендикулярная к плоскости симметрии, образует с ними равные углы. Через данную прямую остается провести плоскости, перпендикулярные к плоскостям симметрии.

159. См решение задачи 158.

160. Разделить сторону A_1B_1 точкой C_2 на части, пропорциональные CA и CB. Отрезок C_1C_2 — проекция биссектрисы треугольника ABC, соответствующей вершине C. Аналогичным образом строим B_1B_2. Точка пересечения отрезков B_1B_2 и C_1C_2 — искомая.

161. См. решение задачи 160.

162. Данный треугольник должен быть остроугольным. Вершина S трехгранного угла проектируется в ортоцентр H сечения ABC. Заметить, что $SH^2 = AH \cdot HA_1$, где A_1 — основание высоты треугольника ABC.

163. Построить три пары плоскостей симметрии для трех пар плоскостей, составленных из данных трех плоскостей. Задача имеет четыре решения, если потребовать, чтобы искомая прямая проходила через точку пересечения данных плоскостей.

164. Построить оси четырех круговых конусов, касающихся данных трех плоскостей (см. задачу 163).

165. Через данную точку провести три прямые, параллельные данным, и построить ось круговой конической поверхности, проходящей через эти три прямые.

166. См. решение задачи 165.

167. Обозначим линейные углы двугранных углов тетраэдра $ABCD$ соответственно через AB, AC, ..., CD. Пользуясь теоремой о площади ортогональной проекции плоской фигуры, получим:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \phantom{S_1 \cos CD + {}} S_2 \cos CD + S_3 \cos BD + S_4 \cos BC,\\
S_2 &= S_1 \cos CD \phantom{{}+ S_2 \cos AD} + S_3 \cos AD + S_4 \cos AC,\\
S_3 &= S_1 \cos BD + S_2 \cos AD + + S_4 \cos AB,\\
S_4 &= S_1 \cos BC + S_2 \cos AC + S_3 \cos AB.
\end{aligned}$$

Если эти равенства почленно умножить на S_1, S_2, S_3 и S_4 и из полученного последнего равенства отнять сумму полученных первых трех равенств, то найдем искомую формулу.

168. Воспользоваться соотношениями, содержащимися в решении задачи 167. Пусть двугранные углы при ребрах AB и CD прямые.
Тогда

$$S_1 = S_3 \cos BD + S_4 \cos BC,$$
$$S_2 = S_3 \cos AD + S_4 \cos AC,$$
$$S_3 = S_1 \cos BD + S_2 \cos AD,$$
$$S_4 = S_1 \cos BC + S_2 \cos AC.$$

Умножив почленно первое равенство на S_1, второе на S_2, третье на S_3 и четвертое на S_4, убедимся, что $S_1^2 + S_2^2 = S_3^2 + S_4^2$.

169. а) Провести плоскость, перпендикулярную к боковым ребрам параллелепипеда. В сечении получаем параллелограмм, сумма квадратов диагоналей которого равна сумме квадратов всех его сторон. Если это равенство почленно умножить на квадрат длины бокового ребра параллелепипеда то получим искомое соотношение между площадями.

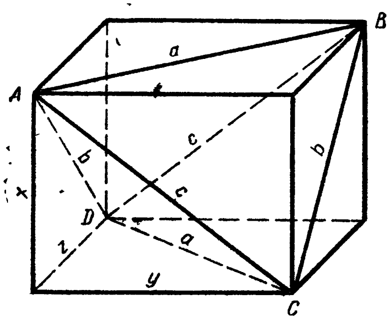
б) Трижды воспользоваться результатом, содержащимся в первой части (а) задачи.

170. Принять $ABCD$ за основание, а точку M — за центр симметрии параллелепипеда и применить трижды теорему, составляющую содержание задачи 169.

171. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, описанный около тетраэдра A_1C_1BD. Применяя четыре раза теорему косинусов для тетраэдра (см. задачу 167), обнаружим, что сумма квадратов площадей граней тетраэдра A_1C_1BD равна полусумме квадратов площадей всех граней параллелепипеда. С другой стороны (см. задачу 169), сумма квадратов площадей всех шести диагональных сечений параллелепипеда равна удвоенной сумме площадей всех его граней. Но площадь сечения, проходящего через ребро тетраэдра и середину противолежащего ребра, равна половине площади соответствующего диагонального сечения параллелепипеда. Итак, сумма квадратов площадей всех указанных в задаче сечений тетраэдра в четыре раза меньше суммы квадратов площадей всех диагональных сечений параллелепипеда или в два раза меньше суммы квадратов площадей всех граней параллелепипеда, или же равна сумме квадратов площадей всех граней тетраэдра.

172. Из вершин C и D опустить на плоскость α перпендикуляры и рассмотреть подобные треугольники.

173. Через противоположные ребра тетраэдра провести пары параллельных плоскостей (черт. 18). Убедиться,



Черт. 18

что эти плоскости своим пересечением образуют прямоугольный параллелепипед, объем которого в три раза больше объема данного тетраэдра. Объем тетраэдра равен

$$\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

174. Отложим на ребрах SA, SB, SC отрезки, равные 1. Тогда (см. задачу 92)

$$v(SA_1B_1C_1)=$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Но согласно задаче 36 получаем:

$$v(SABC)=$$
$$=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

где $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$.

175. Если в формулу, полученную в задаче 170, вместо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ подставить их значения (по теореме косинусов для треугольников SBC, SCA и SAB), то получим искомую формулу:

$$v^2=\frac{1}{144}[4a^2b^2c^2-a^2(b^2+c^2-a_1^2)^2-b^2(c^2+a^2-b_1^2)^2-$$
$$-c^2(a^2+b^2-c_1^2)^2+(b^2+c^2-a_1^2)(c^2+a^2-b_1^2)(a^2+b^2-c_1^2)].$$

176. Опустим из вершины C высоту CC_1 тетраэдра и проведем высоту CC_2 в грани CAB. Тогда $CC_1 = CC_2 \sin\varphi$.

Отсюда

$$v = \frac{1}{3} CC_1 \cdot S(ABD) = \frac{1}{3} CC_2 \cdot S(ABD) \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{3AB} AB \cdot CC_2 \cdot S(ABD) \sin\varphi = \frac{2}{3AB} S(ABC) S(ABD) \cdot \sin\varphi.$$

177. Описать около тетраэдра параллелепипед и заметить, что его объем в три раза больше объема тетраэдра.

178. Заметить, что треугольники AMN и APQ подобны, вследствие чего сумма противоположных углов четырехугольника $MNPQ$ равна 180°.

179. См. решение задачи 178.

180. Установить, что плоскости, проведенные через середины отрезков AB, BC, CA, DA, DB и DC перпендикулярно к этим отрезкам, пересекаются в одной точке, одинаково удаленной от данных точек.

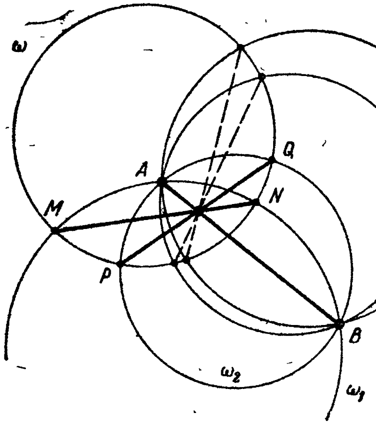
181. На каждой из окружностей взять по точке и через эти две точки и обе точки пересечения данных окружностей провести сферу (см. задачу 180). Воспользоваться тем, что через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная окружность.

182. Установить, что перпендикуляры, восставленные в центрах окружностей к плоскостям, в которых лежат окружности, пересекаются в центре искомой сферы.

183. Через пары точек M и N, P и Q проходит окружность (см. задачи 178, 179); через пары точек P и Q, R и S проходит другая окружность Эти окружности имеют две общие точки P и Q и лежат в различных плоскостях, поэтому через них проходит сфера.

184. Заметить, что две окружности ω_1 и ω_2, проходящие через A и B, пересекают данную окружность ω в таких парах точек M и N, P и Q, что прямые AB, MN, PQ или пересекаются в одной точке, или параллельны (черт. 19). Одну из этих окружностей фиксировать, а вторую выбрать произвольно.

185. Провести через данные точки A и B окружность, пересекающую данную в точках M и N. Из точки пересечения S прямых AB и MN провести к данной окружности касательные. Точки касания этих касательных служат точками касания искомых окружностей.



Черт. 19

186. Прямая, соединяющая данные точки A и B, пересекает данную нрямую в точке M. На прямой остается найти такую точку T, чтобы $MA \cdot MB = MT^2$. Точка T — искомая точка касания.

187. См. решение задачи 184.

188. Провести через данную окружность сперва две сферы, пересекающие данную сферу по двум окружностям. Плоскости этих двух окружностей и плоскость данной окружности или проходят через одну прямую, или параллельны (см. решение задачи 184).

189. Если обе точки A и B лежат вне сферы, то искомое геометрическое место есть окружность. Через A и B провести окружность, пересекающую сферу в точках C и D. Прямая CD пересекает AB в точке M (или параллельна ей). Касательные, проведенные к сфере из точки M, касаются сферы в точках искомого геометрического места точек. Эти точки принадлежат окружности. Если $AB \parallel CD$, то окружность принадлежит диаметральному сечению сферы (см. задачу 187).

190. Через точки A и B провести две сферы, пересекающие данную сферу по окружностям (см. задачу 188).

191. Пусть обе точки A и B лежат вне данной сферы. Убедиться, что искомое геометрическое место точек есть окружность. На прямой AB необходимо найти такую точку C, чтобы квадрат длины отрезка касательной, проведенной из C к данной сфере (от точки C до точки касания), был равен произведению $CA \cdot CB$. Точки касания всех касательных, проведенных к сфере из точки C, лежат на искомой окружности.

Если сфера, проходящая через A и B, пересекает данную сферу по окружности, то плоскость этой окружности пересекает AB в искомой точке C.

192. Через центр окружности ω провести плоскость γ, перпендикулярную данной плоскости α и плоскости β данной окружности. Если плоскость γ пересекает ω в точках A и B, а плоскость α — по прямой m, то центр окружности, проходящей через A и B и касающейся прямой m, есть центр искомой сферы.

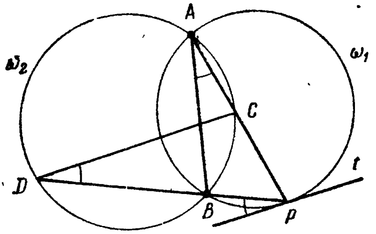
193. Через данную окружность провести сферу, пересекающую данную сферу по окружности (см. задачу 188). Плоскость этой окружности и плоскость данной окружности пересекаются по прямой, через которую следует провести касательные плоскости к данной сфере. Точки касания этих плоскостей со сферой искомые.

194. Пусть прямая, проходящая через данные точки A и B, пересекает данную плоскость α в точке C. Если сфера, проходящая через A и B, касается α в точке M, то $CM^2 = CA \cdot CB$. Значит, искомое геометрическое место точек касания M есть окружность радиуса $\sqrt{CA \cdot CB}$ с центром M.

195. Пусть плоскость α данной окружности пересекает данную прямую g в точке M. Проведем к окружности из точки M касательную MT и построим на прямой g две точки T_1 и T_2, такие, чтобы $MT = MT_1 = MT_2$. Сферы, проходящие через данную окружность и каждую из точек T_1 и T_2, искомые.

196. Пусть прямая g, проходящая через данные точки P и Q, пересекает плоскости α и β соответственно в точках A и B. Построим в плоскости α окружность ω_1 радиуса $\sqrt{AP \cdot AQ}$ с центром A; аналогичным образом строим в плоскости β окружность ω_2 радиуса $\sqrt{BP \cdot BQ}$ с центром B. Центр искомой сферы должен лежать на круговых цилиндрических поверхностях с направляющими окружностями ω_1 и ω_2, а также на плоскости, проходящей перпендикулярно к отрезку PQ через его середину.

197. Воспользоваться теоремой Менелая для косого четырехугольника (см. задачу 33).



Черт. 20

198. Провести хорду AB (черт. 20). Убедиться, что секущая DP образует с прямыми t и CD равные накрест лежащие углы.

199. Через окружность ω и точку S проводим сферу σ_2. Фиксируем на ω точку A и проводим через прямую SA плоскость α, пересекающую σ_1 в точке C, сферы σ_1 и σ_2 — по окружностям ω_1 и ω_2, а окружность ω — в точке B. Согласно задаче 198 касательная к ω_2 в точке S параллельна прямой CD, где D — точка пересечения SB с данной сферой σ_1. По мере того как плоскость α вращается около SA, точка C остается на месте, а прямая CD, меняя свое положение, остается параллельной касательной плоскости τ к σ_2 в точке S. Следовательно, точка D описывает окружность в плоскости, параллельной τ.

200. Если окружность ω_1 проходит через точку B, то ее проекция из B на плоскость α есть прямая. Пусть ω_1 не проходит через B. Выберем на ω_1 точку P и построим ее центральную проекцию Q на плоскости α. Проведем через ω_1 и Q сферу σ_2, пересекающую α по окружности ω_2. Возьмем, далее, на ω_1 некоторую точку P_1 и проведем прямую BP_1, пересекающую сферу σ_2 в точке Q_1. Прямая QQ_1 параллельна касательной к сфере σ_1 в точке B, расположенной в плоскости (BQQ_1) (см. задачу 198). Это значит, что точка Q_1 лежит в α и поэтому на окружности ω_2. Итак, точки P_1 окружности ω_1 проектируются в точки Q_1 окружности ω_2. (Отображение точек сферы на плоскость указанным выше способом называется стереографической проекцией сферы на плоскость. В этом отображении окружности, расположенные на сфере, проектируются в окружности (или, быть может, в прямые).)

201. Установить, что плоскость, проведенная через точки касания на образующих и через центр сферы, перпендикулярна образующим цилиндра. Учесть, что построенная плоскость пересекает сферу и цилиндр по окружностям, которые касаются в трех точках и поэтому совпадают.

202. Спроектировать образующие и касательную на плоскость, перпендикулярную образующим цилиндра.

203. См. решение задачи 202.

204. Провести через точку плоскость, перпендикулярную касательным плоскостям.

205. Провести плоскость, перпендикулярную к образующим цилиндрической поверхности.

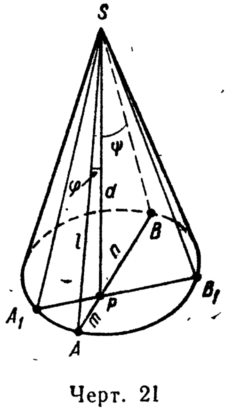
206. Спроектировать ортогонально косой четырехугольник на плоскость, перпендикулярную образующим цилиндра (см. задачу 33).

207. Через биссектрисы плоских углов данного трехгранного угла провести плоскости, перпендикулярные его граням, содержащим указанные биссектрисы. Эти плоскости пересекаются по оси конической поверхности.

208. Пересечь данные прямые плоскостью α, перпендикулярной к оси конической поверхности, проходящей через эти прямые. Применить теорему Птолемея к четырехугольнику, вписанному в окружность, по которой плоскость α пересекает коническую поверхность.

209. Провести биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла. Если ограничиться внутренними биссекторными плоскостями, то получим единственную вписанную коническую поверхность. Если же воспользоваться внутренними и внешними биссекторными плоскостями, то получим четыре конические поверхности, касающиеся плоскостей граней трехгранного угла.

210. Заметить, что если плоскости α и β, касающиеся конической поверхности вдоль образующих a и b, пересекаются по прямой m, то $\angle(a, m) = \angle(b, m)$. Далее см. задачу 69.



Черт. 21

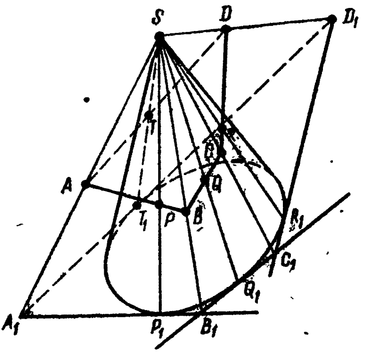
211. Пересечь коническую поверхность плоскостью, перпендикулярной ее оси. В плоскости α получаем треугольник ABS, на основании AB которого имеется точка P (черт. 21). Положим $AP = m$, $PB = n$, $SP = d$, $SA = SB = l$, $\angle ASP = \varphi$, $\angle BSP = \psi$. Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{d^2 + l^2 - m^2}{2dl}, \quad \cos\psi = \frac{d^2 + l^2 - n^2}{2dl}, \quad l^2 - d^2 = mn.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\cdot\frac{1-\cos\psi}{1+\cos\psi}=\frac{[m^2-(l-d)^2][n^2-(l-d)^2]}{[(l+d)^2-m^2][(l+d)^2-n^2]}=$$
$$=\frac{(l-d)^2}{(l+d)^2}\cdot\frac{(l+d)^2-(m^2+n^2)+(l-d)^2}{(l-d)^2-(m^2+n^2)+(l+d)^2}=\frac{(l-d)^2}{(l+d)^2}.$$

212. Провести плоскость, перпендикулярную оси конической поверхности (черт. 22), и спроектировать на нее из вершины конической поверхности стороны косого четырехугольника (см. задачи 33, 206). Установить, что $\frac{AP}{PB}=\frac{SB_1}{BS}\cdot\frac{A_1P_1}{P_1B_1}\cdot\frac{SA}{A_1S}$. Аналогично выразить отношения $\frac{BQ}{QC}$, $\frac{CR}{RD}$, $\frac{DT}{TA}$.



Черт. 22

213. Вершина и каждая из касательных определяют касательные плоскости к искомой конической поверхности (см. задачу 209).

214. Заметить, что точки касания A, B и C образующих конической поверхности со сферой находятся на равных расстояниях от вершины конической поверхности. Плоскость ABC пересекает и коническую поверхность и сферу по окружностям, которые совпадают. Вследствие этого сфера касается всех образующих конической поверхности.

215. Пересечь данные плоскости α и β двумя параллельными прямыми A_1B_1 и A_2B_2. Прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются на прямой пересечения m данных плоскостей (или параллельны ей).

216. Если M — общий центр вписанных окружностей данных треугольников, то $AM:MA'=A_1M:MA_1'$, где A' и A_1' — основания биссектрис углов A и A_1 треугольников: $AM:MA'=(b+c):a$, $A_1M:MA_1'=(b_1+c_1):a_1$. Из подобия данных треугольников следует истинность пропорции. Далее, $BA':A'C=B_1A_1':A_1'C_1$, откуда следует, что прямые BB_1, CC_1 и $A'A_1'$ параллельны одной плоскости (см. задачу 14). Заметить, что $AA_1 \| A'A_1'$.

217. Учесть, что

$$v(ABCG)=v(BCDG)=v(CDAG)=v(DABG),$$

где G — центроид тетраэдра. Но точка G совпадает с центром M вписанной сферы. Поэтому высоты указанных четырех тетраэдров равны, вследствие чего равны площади граней данного тетраэдра.

218. Если развертка тетраэдра состоит из четырех треугольников, образующих один треугольник, то этот треугольник должен быть остроугольным (это вытекает из свойств плоских углов трехгранного угла).

219. Провести через пары противоположных ребер тетраэдра пары параллельных плоскостей, образующих параллелепипед. Угол между диагоналями, принадлежащими одной грани параллелепипеда, есть угол между противоположными ребрами тетраэдра. Воспользоваться теоремой косинусов и зависимостью между сторонами и диагоналями параллелограмма:

$$\cos(\widehat{AB,\ CD})=\frac{|AC^2+BD^2-(AD^2+BC^2)|}{2AB\cdot CD}.$$

220. Провести высоту SM тетраэдра и установить, что $\angle(SM, SA)=\alpha$, $\angle(SM,\ SB)=\beta$, $\angle(SM, SC)=\gamma$ (см. задачу 105).

221. Если D_1 — центроид грани ABC, то

$$DD_1^2=\frac{1}{3}(DA^2+DB^2+DC^2)-\frac{1}{9}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

222. Если M — середина ребра AB, а N — середина ребра CD, то

$$MN^2=\frac{1}{4}(BC^2+DA^2+CA^2+DB^2-AB^2-CD^2).$$

223. Диаметр d сферы равен расстоянию между серединами противоположных ребер тетраэдра. Итак, $r_0=\frac{d}{2}=$ $=\frac{a}{2\sqrt{2}}$, где a — длина ребра тетраэдра.

224. Из условия задачи следует:

$$\angle ABD_1=\angle ABC_1=\alpha_{12},\quad \angle BCD_1=\angle BCA_1=\alpha_{23},$$
$$\angle CAD_1=\angle CAB_1=\alpha_{31},\quad \angle DAC_1=\angle DAB_1=\alpha_{14},$$
$$\angle DBC_1=\angle DBA_1=\alpha_{42},\quad \angle DCA_1=\angle DCB_1=\alpha_{43}.$$

Но

$$\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{31}=2\pi,\quad \alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{42}=2\pi,$$
$$\alpha_{34}+\alpha_{41}+\alpha_{13}=2\pi,\quad \alpha_{41}+\alpha_{12}+\alpha_{24}=2\pi,\qquad (\alpha_{ik}=\alpha_{kl}).$$

Отсюда

$$\alpha_{12}=\alpha_{34},\quad \alpha_{23}=\alpha_{41},\quad \alpha_{31}=\alpha_{42}.$$

225. Повернуть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ около диагонали AC_1 на $120°$, после чего он займет положение $AA_1B_1BDD_1C_1C$. Следовательно, диагональ BD_1 занимает положение A_1C, а плоскость $(AC_1,\ BD_1)$ — положение $(AC_1,\ A_1C)$. Эти плоскости образуют угол $120°$.

226. Через прямые a и b провести параллельные плоскости α и β, пересекающие прямую c в точках A_0 и B_0. Разделить отрезок A_0B_0 точкой C в данном отношении и провести через C прямую, пересекающую прямые a и b.

227. Если плоскость α пересекает биссектрису l в точке L, то

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{2\cos\varphi}{SL},$$

где $2\varphi=\angle(a,\ c)=\angle(b,\ d)$. В самом деле, проведем в плоскости $(a,\ c)$ через точку L прямую, параллельную a, пересекающую c в точке K. Тогда $\frac{SA}{LK}=\frac{SB}{SB-LK}$, откуда $\frac{1}{SA}+\frac{1}{SB}=\frac{1}{LK}$.

228. Заметить, что

$$\frac{AA_1}{MA_1}=\frac{v_1+v_2+v_3+v_4}{v_1}=\frac{s_1+s_2+s_3+s_4}{s_1},$$

где $v_i=\frac{1}{3}rs_i$, r — радиус вписанной сферы.

229. Представить n в виде $3k$, $3k+1$, $3k+2$ и убедиться, что при делении n^2 на 3 получаются во всех случаях остатки 0 или 1.

230. Рассмотреть сумму $(3k+1)^{2s+1}+(3k+2)^{2t+1}$ и воспользоваться разложением биномов и теоремой Безу.

231. Убедиться в том, что уравнение

$$x^2+x-(121n-3)=0$$

не имеет целых решений. Рассмотреть его дискриминант $11(44n-1)$ и доказать, что число $44n-1$ не может быть квадратом натурального числа.

232. Представить данное число в виде

$$2^{n+1}[5(25^{n-1}-6^{n-1})+6^{n-2}(30+27)].$$

233. Представить данное число в виде

$$(9-4)^{6n+5}+(9-2)^{6n+7}=9N-2^{6n+7}(8^{2n+1}+1).$$

234. Представить данную сумму в виде

$$\left(\frac{10^m+2}{3}\right)^2.$$

235. Заметить, что число x^3+3x^2-x-3 при нечетных x есть произведение трех последовательных четных чисел.

236. Представить данную разность в виде $(10+1)^{10}-1$ и воспользоваться разложением бинома.

237. Если $(n-1)$ — меньшее из данных четырех последовательных чисел, то рассматриваемая сумма равна $(n^2+n-1)^2$.

238. Показать, что число $(10k+s)^2$ при $s=1, 2, \ldots, 8, 9$ не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами. Поэтому искомое число оканчивается только нулем.

239. Слагаемые данной суммы представить в виде

$$1-\frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

240. Воспользоваться формулой

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Заметить, что

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=1^2+2^2+\ldots+(2n-1)^2-$$
$$-4(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2).$$

241. 1) Если n — четное, то сумма равна $-\frac{1}{2}(n+1)n$.

Если же n — нечетное, то сумма равна $\frac{1}{2}(n+1)n$.

Действительно, при четном n имеем:

а) $s=(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+\ldots+[(n-1)^2-n^2]=$

$$=-(3+7+11+\ldots+(2n-1))=-\frac{(2n+2)\cdot\frac{n}{2}}{2}=-\frac{n(n+1)}{2}.$$

б) Воспользуемся полученной формулой для нечетного n:

$$s=1^2-2^2+3^2-\ldots-(n-1)^2+n^2-(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Отсюда

$$1^2-2^2+3^2-\ldots-(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2) $s-xs=x+x^2+\ldots+x^n-nx^{n+1}$,

откуда

$$s=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2};$$

3)

$$s=\frac{-x-(n+1)(-1)^{n+1}x^{n+1}+n(-1)^{n+2}x^{n+2}}{(1+x)^2}.$$

242. $$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=$$

$$=\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+d}\right)+\left(\frac{1}{a_1+d}-\frac{1}{a_1+2d}\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{a_1+(n-2)d}-\frac{1}{a_1+(n-1)d}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{a_n-a_1}{da_1a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}.$$

243. Освободиться от иррациональности в знаменателях. Искомая сумма равна

$$\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

244. Последовательно умножить равенства

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=2a_n+1,\\ a_n&=2a_{n-1}+1,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ a_2&=2a_1+1 \end{aligned}$$

почленно на $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ и сложить:

$$a_{n+1}=2^{n+1}-1,\quad a_n=2^n-1.$$

245.

$$a_2=\frac{(2+1)a_1-(2-1)}{-(2-1)a_1+(2+1)},$$

$$a_3=\frac{(2^2+1)\,a_1-(2^2-1)}{-(2^2-1)\,a_1+(2^2+1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{(2^{n-1}+1)\,a_1-(2^{n-1}-1)}{-(2^{n-1}-1)\,a_1+(2^{n-1}+1)}.$$

Отсюда

$$a_n=\frac{\dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}-1}\,a_1-1}{-a_1+\dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}-1}},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{a_1-1}{-a_1+1}=-1.$$

246. Последовательно умножить равенства

$$a_2=3a_1+2,$$
$$a_3=3a_2+2^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-1}=3a_{n-1}+2^{n-2},$$
$$a_n=3a_{n-1}+2^{n-1}$$

почленно на 3^{n-2}, 3^{n-3}, $\ldots$, 3, 1 и сложить:

$$a_n=3^{n-1}+(2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\ldots+3^{n-2}\cdot 2)=3^n-2^n.$$

247. Обозначим данную сумму через s. Тогда

$$s=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3=\sum_{k=1}^{n}(8k^3-12k^2+6k-1)=$$
$$=8\sum_{k=1}^{n}k^3-12\sum_{k=1}^{n}k^2+6\sum_{k=1}^{n}k-n=$$
$$=8\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}-12\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-$$
$$-6\,\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2(2n^2-1).$$

248. Заметить, что

$$\sqrt{2}<\sqrt{2}^{\sqrt{2}}<2;\quad \sqrt{2}^{\sqrt{2}}<\sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}<2 \text{ и т. д.}$$

Итак, последовательность возрастающая, но ограничена сверху ($a_n<2$), следовательно, она имеет предел. Если этот предел равен x, то $x=\sqrt{2}^{x}$. Это уравнение имеет решение $x=2$. Поэтому 2 и есть искомый предел.

249. $\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\cos 7{,}5^\circ =$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$
$$\cos 86^\circ\,15' = \sin 3^\circ\,15' = \sin \frac{1}{2}\cdot 7^\circ\,30' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos 7^\circ\,30'}.$$

250. $\cos 27^\circ = \cos\,(45^\circ - 18^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)$.
Учесть, что
$$\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \quad \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$
Далее, заметить, что
$$\sin 12^\circ = \sin\,(27^\circ - 15^\circ),$$
причем
$$\sin\,(45^\circ - 18^\circ) = \sin 27^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 18^\circ - \sin 18^\circ).$$

251. Учесть, что
$$\cos 27^\circ - \cos 63^\circ = \sqrt{2}\sin 18^\circ.$$

252. $-\sin 41^\circ\cdot\sin 19^\circ + \cos^2 11^\circ = \sin\,(11^\circ+30^\circ)\sin\times$
$\times\,(11^\circ - 30^\circ) + \cos^2 11^\circ = \frac{3}{4}\sin^2 11^\circ - \frac{1}{4}\cos^2 11^\circ +$
$+\cos^2 11^\circ = \frac{3}{4}$.

253. Если $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = x$, то $x^3 -$
$- 6x - 40 = 0$; это уравнение имеет только один вещественный корень, равный 4.

254. $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = \operatorname{tg}\,(50^\circ - 30^\circ) + \operatorname{tg} 40^\circ +$
$$+\operatorname{tg}\,(50^\circ+30^\circ) = \frac{8\operatorname{tg} 50^\circ}{3-\operatorname{tg}^2 50^\circ} + \operatorname{tg} 40^\circ =$$
$$= \frac{8\sin 40^\circ\,(1-\sin^2 40^\circ) + \sin 40^\circ\,(4\sin^2 40^\circ - 1)}{\cos 40^\circ\,(4\sin^2 40^\circ - 1)}.$$
Но $\cos 40^\circ\,(4\sin^2 40^\circ - 1) = \frac{1}{2}$,
$$6\sin 40^\circ - 8\sin^3 40^\circ = \sqrt{3}.$$
Поэтому $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3} + 8\sin 40^\circ$.

255. $\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ = \frac{3-\operatorname{tg}^2 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ}$,

$$\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 5^\circ = \frac{(3-\operatorname{tg}^2 5^\circ)\operatorname{tg} 5^\circ}{1-3\operatorname{tg}^2 5^\circ} = \operatorname{tg} 15^\circ.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 65^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} 85^\circ.$$

256. Пусть $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = x$.

Тогда

$$x = 2\cos\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7} + 1 - 2\cos^2\frac{\pi}{7} =$$
$$= 2\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7}\right) + 1.$$

Но $\cos\frac{2\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{3\pi}{7} - x$. Поэтому $x = 2\cos\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{3\pi}{7} - x\right) + 1$, или $x\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{7}\right) = 1 + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7}$. Но $\cos\frac{4\pi}{7} = -\cos\frac{3\pi}{7}$. Следовательно,

$$x\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{7}\right) = 1 + \left(\cos\frac{\pi}{7} - x\right).$$

Отсюда $x = \frac{1}{2}$.

257. Если $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \beta$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) = 1$. Поскольку $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 > \frac{1}{3}$, то $2\beta < \frac{\pi}{4}$; кроме того, $\alpha < \frac{\pi}{8}$, поэтому $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$ и $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

258. См. решение задачи 257.

259. Очевидно, $C_n^n + C_{n+1}^n = C_{n+2}^{n+1}$.

Предположив, что

$$C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1},$$

доказать, что

$$C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1},$$

или

$$C_{n+m}^{n+1} + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1}.$$

Истинность последнего равенства проверяется непосредственно.

260. $s = C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + (n+1)C_n^n =$

$$= (C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n) + (C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n) = 2^n + n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2} + \ldots + (n-1) + 1\right] = 2^n + n\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2).$$

261. Воспользуемся разложением бинома:

$$(1+x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}.$$

Отсюда

$$\frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2} x^2 + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1} x^{n+1}.$$

В это тождество положить $x = 1$.

262. Очевидно, $(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n}$, или

$$(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n)(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n) = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \ldots + C_{2n}^n x^n + \ldots + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Коэффициенты при x^n в обеих частных тождествах равны, поэтому

$$C_{2n}^n = C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \ldots + C_n^n C_n^0 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

263. Рассмотреть тождество

$$(1+x)^m (1-x)^m = (1-x^2)^m$$

при $m = 2n+1$. Коэффициенты при x^{2n+1} в левой и правой частях тождества равны нулю. Поэтому

$$-C_{2n+1}^0 \cdot C_{2n+1}^{2n+1} + C_{2n+1}^1 C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^2 C_{2n+1}^{2n-1} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^0 = 0,$$

или

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n+1}^1)^2 + (C_{2n+1}^2)^2 - \ldots - (C_{2n+1}^{2n+1})^2 = 0.$$

264. Если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, то $(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2) \geqslant 0$, откуда следует

$$x_1^n + x_2^n \geqslant x_1^{n-1} x_2 + x_1 x_2^{n-1}.$$

Пусть $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Положим

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = \sigma_k, \quad k = 1,\ n-1,\ n.$$

Воспользуемся полученным неравенством. Имеем:

$$(x_1^n + x_2^n) + (x_1^n + x_3^n) + \ldots + (x_1^n + x_n^n) \geqslant x_1^{n-1}(\sigma_1 - x_1) + x_1(\sigma_{n-1} - x_1^{n-1}),$$

$$(x_2^n+x_1^n)+(x_2^n+x_3^n)+\ldots+(x_2^n+x_n^n)\geqslant x_2^{n-1}(\sigma_1-x_2)+$$
$$+x_2(\sigma_{n-1}-x_2^{n-1}),$$

. . . .

$$(x_n^n+x_1^n)+(x_n^n+x_2^n)+\ldots+(x_n^n+x_{n-1}^m)\geqslant x_n^n(\sigma_1-x_n)+$$
$$+x_n(\sigma_{n-1}-x_n^{n-1}).$$

После почленного сложения этих неравенств получим:

$$2(n-1)\sigma_n\geqslant\sigma_1\sigma_{n-1}-\sigma_n+\sigma_{n-1}\cdot\sigma_1-\sigma_n.$$

Отсюда $n\sigma_n\geqslant\sigma_1\sigma_{n-1}$.

Знак равенства имеет место при $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

265. Положим

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\sigma_1,\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\sigma_{-1}.$$

Имеем:

$$\sigma_1\cdot\sigma_{-1}=n+\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)+\left(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)+\ldots+\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_{n-1}}\right).$$

Но $\frac{x_k}{x_{k+s}}+\frac{x_{k+s}}{x_k}\geqslant 2$. Всего аналогичных неравенств имеется C_n^2, т. е. $\frac{1}{2}n(n-1)$. Поэтому

$$\sigma_1\cdot\sigma_{-1}\geqslant n+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2.$$

266. Положим $x_i=y_i^n$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид

$$y_1^n+y_2^n+\ldots+y_n^n\geqslant ny_1\cdot y_2\ldots y_n.$$

Для $n=2$ оно, очевидно, имеет место. Предположим, что оно имеет место для $n=k>2$. Докажем, что из этого предположения следует справедливость неравенства для $n=k+1$.

Итак, согласно предположению имеем:

$$y_2^k+y_3^k+\ldots+y_k^k+y_{k+1}^k\geqslant ky_2y_3\ldots y_ky_{k+1},$$
$$y_1^k+y_3^k+\ldots+y_k^k+y_{k+1}^k\geqslant ky_1y_2\ldots y_ky_{k+1},$$

. . . .

$$y_1^k+y_2^k+y_3^k+\ldots+y_k^k\geqslant ky_1y_2\ldots y_{k-1}y_k.$$

После почленного сложения неравенств получим:

$$y_1^k+y_2^k+\ldots+y_{k+1}^k\geqslant y_1y_2y_3\ldots y_{k+1}\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_{k+1}}\right).$$

Воспользуемся решением задачи 264:

$$(k+1)(y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\ldots+y_{k+1}^{k+1})\geqslant(y_1+y_2+\ldots+y_{k+1})\times$$
$$\times(y_1^k+y_2^k+\ldots+y_{k+1}^k).$$

Перемножим почленно последние два неравенства и упростим:

$$(k+1)(y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\ldots+y_{k+1}^{k+1})\geqslant$$
$$\geqslant y_1y_2\ldots y_{k+1}(y_1+y_2+\ldots+y_{k+1})\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_{k+1}}\right).$$

Но согласно решению задачи 265 имеем:

$$(y_1+y_2+\ldots+y_{k+1})\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\ldots+\frac{1}{y_{k+1}}\right)\geqslant(k+1)^2.$$

Отсюда получаем доказываемое неравенство:

$$y_1^{k+1}+y_2^{k+1}+\ldots+y_{k+1}^{k+1}\geqslant(k+1)\,y_1y_2\ldots y_{k+1}.$$

Знак равенства имеет место при $y_1=y_2=\ldots=y_n$.

267. Очевидно, имеет место неравенство

$$(x_1+ky_1)^2+(x_2+ky_2)^2+\ldots+(x_n+ky_n)^2=$$
$$=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)+2k(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)+$$
$$+k^2(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2).$$

Следовательно, при любом значении k квадратный трехчлен

$$(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)k^2+2(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)k+$$
$$+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)$$

неотрицателен, значит, его дискриминант меньше или равен нулю. Это приводит к доказываемому неравенству:

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2\leqslant$$
$$\leqslant(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2).$$

Полученное неравенство можно записать в виде

$$(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+\ldots+(x_ny_1-x_1y_n)^2\geqslant 0.$$

Отсюда следует, что знак равенства возможен только при условии, когда $y_i=lx_i$, т. е. когда числа y_i пропорциональны числам x_i.

268. Воспользоваться задачей 267, положив $y_1=y_2=$ $=\ldots=y_n=1$.

269. $a^2+b^2+c^2=1-2ab-2bc-2ca \geqslant 1-\frac{(a+b)^2}{2}-$
$-\frac{(b+c)^2}{2}-\frac{(c+a)^2}{2}=1-\frac{1}{2}[(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2]=$
$=1-\frac{1}{2}(3-2+a^2+b^2+c^2).$

Отсюда $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Знак равенства имеет место при $a=b=c$.

270. См. решение задачи 265. Имеем:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}-1+\frac{a+b+c}{c+a}-1+\frac{a+b+c}{a+b}-$$
$$-1=(a+e+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3=$$
$$=\frac{1}{2}[(a+e)+(b+c)+(c+a)]\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}.$$

271. $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\times$
$\times\cos^2 x+\cos^4 x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x=$
$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x.$

Но $0 \leqslant \sin^2 2x \leqslant 1$, поэтому $\frac{1}{4} \leqslant \sin^6 x+\cos^6 x \leqslant 1$.

272. При $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}$ имеем:

$$0<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)<\frac{\pi}{2}-\varphi<\frac{\pi}{2}-\sin\varphi<\frac{\pi}{2}$$

Поэтому в силу монотонного возрастания функции $y=\sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\sin(\cos\varphi)-\cos(\sin\varphi)=\sin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\right]-$
$-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin\varphi\right)<0$, откуда $\sin(\cos\varphi)<\cos(\sin\varphi)$.

273. Учесть, что $\operatorname{tg}\alpha>\alpha$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Далее имеем:

$$\sin x+\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=$$
$$=\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}}>4\operatorname{tg}\frac{x}{2}>4\cdot\frac{x}{2}=2x.$$

274. Так как $\sin 2x=2\sin x\cos x$, то $|\sin 2x| \leqslant 2|\sin x|$, и для $k=2$ справедливость неравенства установлена.

Пусть неравенство $|\sin kx| \leqslant k|\sin x|$ справедливо при некотором $k > 2$. Воспользуемся методом математической индукции. Имеем:

$$|\sin(k+1)x| = |\sin kx\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos kx| \leqslant$$
$$\leqslant |\sin kx|\cdot|\cos x| + |\sin x|\cdot|\cos kx| \leqslant$$
$$\leqslant k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|.$$

Справедливость неравенства установлена.

275. Находим дискриминант D уравнения:

$$D = 9(a+b+c+d)^2 - 24(ab+bc+cd+da+ac+bd) =$$
$$= 3[(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2].$$

Очевидно, $D \geqslant 0$.

276. Очевидно, $x \neq 0$, $x \neq -a$, $x \neq -b$, $x \neq -(a+b)$.

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a+b}\right)+\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right)=0,$$
$$\frac{2x+a+b}{x(x+a+b)}+\frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)}=0,$$
$$(2x+a+b)[2x^2+2x(a+b)+ab]=0,$$
$$x_1 = -\frac{a+b}{2}, \qquad x_{2,3} = \frac{1}{2}\left[-(a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2}\right].$$

Все корни уравнения вещественны $(a+b \neq 0)$.

277. Согласно формуле Виета имеем:

$$x_1+x_2+x_3 = -p, \qquad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = q.$$

Следовательно, $(x_1+x_2+x_3)^2 - 3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1) < 0$ или $\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2] < 0$.

Итак, только один из корней вещественный.

278. После подстановки $x = y - \frac{a+b}{2}$ данное уравнение принимает вид:

$$y^4 + 6\frac{(a-b)^2}{4}y^2 + \frac{(a-b)^4}{16} = c.$$

279. Очевидно,

$$\left(x-\frac{ax}{x+a}\right)^2 = m^2 - \frac{2ax^2}{x+a}, \quad \frac{x^4}{(x+a)^2}+2a\frac{x^2}{x+a}-m^2=0.$$

Положив $\frac{x^2}{x+a} = y$, получим $y^2+2ay-m^2=0$, $y = -a \pm \sqrt{a^2+m^2}$. С другой стороны,

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4}+ay}.$$

Подставив вместо y одно его значение $-a+\sqrt{a^2+m^2}$, найдем два вещественных корня данного уравнения. Если подставить вместо y его другое значение $-a-\sqrt{a^2+m^2}$, то корни будут вещественны, если $-a-\sqrt{a^2+m^2}+4a\leqslant 0$, откуда находим, что $m^2\geqslant 8a^2$. Итак, при $m^2\geqslant 8a^2$ все корни данного уравнения вещественны.

280. Освободиться от иррациональностей:

$$p+x=x^2+(p-x)-2x\sqrt{p-x}.$$

Поскольку нуль не есть корень уравнения, то

$$x-2=2\sqrt{p-x}.$$

Далее,

$$x^2-4x+4=4p-4x,\quad x=\pm 2\sqrt{p-1}.$$

Но $x>0$, поэтому $x=2\sqrt{p-1}$ и

$$\sqrt{(\sqrt{p-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{p-1}-1)^2}=2\sqrt{p-1}.$$

Следовательно, $\sqrt{p-1}-1\geqslant 0$, $p\geqslant 2$. Итак, $x=2\sqrt{p-1}$, $p\geqslant 2$ — корень уравнения.

281. Положим

$$x+10=u^4,\quad 7-x=v^4.$$

Тогда $u^4+v^4=17$, $u+v=3$.

Остается решить эту систему. Имеем:

$$u^4+v^4+4uv(u^2+v^2)+6u^2v^2=81,$$

где $u^4+v^4=17$, $u^2+v^2=9-2uv$. После подстановки этих выражений получим:

$$u^2v^2-18uv+32=0.$$

Отсюда $uv=2$, $uv=16$. Система $u+v=3$, $uv=2$ имеет решения $u_1=2$, $v_1=1$ и $u_2=1$, $v_2=2$. Они позволяют найти x: $x_1=6$, $x_2=-9$. Система $uv=16$, $u+v=3$ вещественных решений не имеет.

282. $2^{2-2x}+2^{1-2x}=3^{\frac{1}{2}-x}+3^{\frac{3}{2}-x}$,

$$2^{1-2x}(2+1)=3^{\frac{1}{2}-x}(1+3),$$

$$2^{-1-2x}=3^{-\frac{1}{2}-x},\quad 2x+1=x+\frac{1}{2}=0,\quad x=-\frac{1}{2}.$$

283. Положить $(2+\sqrt{3})^x=y$; тогда $(2-\sqrt{3})^x=\frac{1}{y}$, и данное уравнение принимает вид: $y^2-4y+1=0$.

Отсюда $y=2\pm\sqrt{3}$ и $x_1=1$, $x_2=-1$.

284. Положим $\log_a x=y$, $\log_{ax}\frac{a}{x}=z$.

Тогда $a^y=x$, $a^z\cdot x^z=\frac{a}{x}$.

Отсюда $x^{z+1}=a^{1-z}$ и $a^{y(z+1)}=a^{1-z}$. Так как $a\neq 1$, то $yz+y=1-z$ и $z=\frac{1-y}{1+y}$.

Данное уравнение принимает вид:

$$y^2+3=4y+3\frac{1-y}{1+y}.$$

Отсюда

$$(y^2-4y+3)(1+y)=3(1-y),\quad y^3-3y^2+2y=0.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=a$, $x_3=a^2$.

285. Положим

$$\log_x a=y,\quad \log_{ax} a=z,\quad \log_{a^2x} a=t.$$

Отсюда

$$x=a^{\frac{1}{y}},\ ax=a^{\frac{1}{z}},\ a^2x=a^{\frac{1}{t}},$$
$$a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{z}-1},\quad a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{t}-2},$$
$$\frac{1}{y}=\frac{1-z}{z},\quad \frac{1}{y}=\frac{1-2t}{t}$$

и $z=\frac{y}{1+y}$, $t=\frac{y}{1+2y}$. Данное уравнение $2y+z+3t=0$ принимает вид:

$$2y+\frac{y}{1+y}+\frac{3y}{1+2y}=0,\quad y\neq 0.$$

После преобразований получаем уравнение $4y^2+11y+6=0$.

Ответ: $x_1=a^{-\frac{1}{2}}$, $x_2=a^{-\frac{4}{3}}$.

При решении этой и предыдущей задачи можно пользоваться формулой перехода: $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

286. Преобразовать уравнение к виду

$$\sin x\,(1+\cos x)=1-\cos x.$$

Возводя уравнение почленно в квадрат, получим:

$$\cos x\,(1-\cos x)\,(\cos^2 x + 3\cos x + 4) = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0$, $\cos x = 1$.

Другое решение этой задачи сводится к уравнению

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \neq 4s+2$, $x \neq 4s+3$.

287. Положим $\sin x + \cos x = u$, $\sin x \cdot \cos x = v$. Тогда $u^2 = 1 + 2v$. Данное уравнение принимает вид: $u(1-v) = \sqrt{2}\,v$. Исключив u, получим:

$$2v^3 - 5v^2 + 1 = 0, \quad (2v-1)(v^2 - 2v - 1) = 0.$$

Отсюда $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = 1 + \sqrt{2}$, $v_3 = 1 - \sqrt{2}$. Корень v_2 следует отбросить. Корню v_3 соответствует $u_3 = \frac{\sqrt{2}\,v_3}{1-v_3} = 1 - \sqrt{2}$. Для нахождения $\sin x$ и $\cos x$ составляем квадратное уравнение $z^2 - (1-\sqrt{2})\,z + 1 - \sqrt{2} = 0$, корни которого вещественны. Поэтому $\sin 2x = 2(1-\sqrt{2})$. Остается еще $v_1 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \sqrt{2}$. Для нахождения $\sin x$ и $\cos x$ составляем квадратное уравнение

$$z^2 - \sqrt{2}\,z + \frac{1}{2} = 0.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

$$x = \frac{1}{2}(-1)^k \arcsin 2(1-\sqrt{2}) + k\frac{\pi}{2}.$$

288. Положить

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin y = \frac{2v}{1+v^2}, \quad \cos y = \frac{1-v^2}{1+v^2}.$$

Данное уравнение приводится к виду

$$(u-v)^2 + (3uv-1)^2 = 0.$$

Отсюда $u = v$, $3uv = 1$ и $u = v = \pm\frac{1}{3}$.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $\quad y_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad y_2 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

289. Учесть, что $a^2+b^2 \geqslant \frac{(a+b)^2}{2}$. Следовательно,

$$(1+z^2+\operatorname{ctg}^2 x)^2+(2-z^2+\operatorname{tg}^2 x)^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}(3+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

Значит, $12+\frac{1}{2}\cos y \geqslant \frac{25}{2}$, $\cos y=1$, и поэтому

$$(1+z^2+\operatorname{ctg}^2 x)^2+(2-z^2+\operatorname{tg}^2 x)^2=\frac{25}{2}.$$

Но тогда $\operatorname{tg}^2 x=\operatorname{ctg}^2 x$, $1+z^2+\operatorname{ctg}^2 x=2-z^2+\operatorname{tg}^2 x$.

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$ $\left(\text{или } x=\frac{\pi}{4}(2m+1)\right)$, $y=2k\pi$, $z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

290. Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u$, $\operatorname{tg}\frac{y}{2}=v$. Тогда $uv=2-\sqrt{3}$. Далее, $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin y=\frac{2v}{1+v^2}$, $\cos y=$ $=\frac{1-v^2}{1+v^2}$. Поэтому первое равенство после упрощений принимает вид $u^2+v^2=1-3u^2v^2$ или $u^2+v^2=12\sqrt{3}-20$.

Второе равенство принимает вид

$$3(u-v)^2=a^2(u+v)^2.$$

Но $(u+v)^2=10\sqrt{3}-16$, $(u-v)^2=14\sqrt{3}-24$. Поэтому

$$3(14\sqrt{3}-24)=a^2(10\sqrt{3}-16).$$

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{11}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{3}}$.

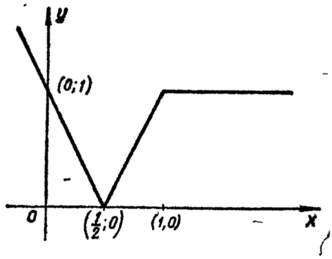
291. Если $x \geqslant 1$, то $y=|x-1-x|=1$.
Если $x<1$, то $y=|1-2x|=$

$$=\begin{cases} 2x-1 & \text{при } \frac{1}{2}\leqslant x<1, \\ 1-2x & \text{при } x<\frac{1}{2} \end{cases}$$ (см. черт. 23).

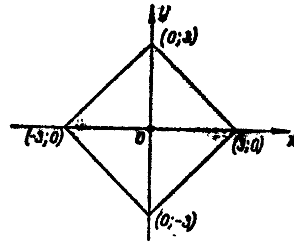
292. 1) Рассмотрим 4 случая:

а) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $|x|+|y|=x+y$;
б) $x\geqslant 0$, $y<0$, $|x|+|y|=x-y$;
в) $x<0$, $y\geqslant 0$, $|x|+|y|=-x+y$;
г) $x<0$, $y<0$, $|x|+|y|=-x-y$

(см. черт. 24).



Черт. 23

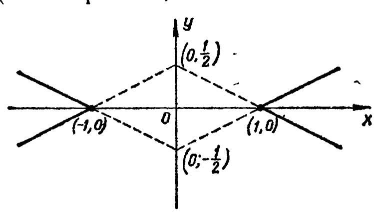


Черт. 24

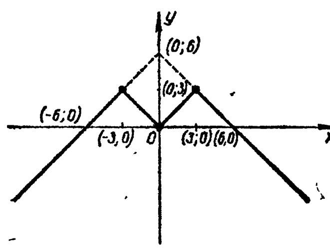
2) Аналогично 1):

а) $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ |x|-2|y|=x-2y;$
б) $x \geqslant 0,\ y < 0,\ |x|-2|y|=x+2y;$
в) $x < 0,\ y \geqslant 0,\ |x|-2|y|=-x-2y;$
г) $x < 0,\ y < 0,\ |x|-2|y|=-x+2y$

(см. черт. 25).



Черт. 25



Черт. 26

293. Легко видеть, что $f(x)=3-|x|$, поэтому $f(f(x))=-3-|3-|x||=$

$$=\begin{cases} 6+x, \text{ если } x\leqslant -3,\\ -x, \text{ если } -3<x\leqslant 0,\\ x, \text{ если } 0<x\leqslant 3,\\ 6-x, \text{ если } x>3\end{cases}$$

(см. черт. 26).

294. Пусть $h>0$. Тогда

$$x+h+\sin(x+h)-x-\sin x=h+2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\geqslant 0,$$

так как $\left|2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right|\leqslant 2\cdot\frac{h}{2}=h.$

Поэтому данная функция возрастающая.

296. 1) $\cos x - \operatorname{ctg} x \geqslant 0$, $\operatorname{ctg} x(\sin x - 1) \geqslant 0$.
Так как $\sin x - 1 \leqslant 0$ при любом x, то $\operatorname{ctg} x \leqslant 0$, откуда

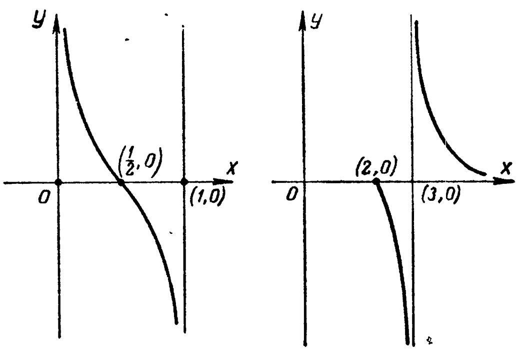
$$\frac{\pi}{2} + k\pi \leqslant x < \pi + k\pi.$$

2) $3\cos x - 2\cos^2 x - 1 \geqslant 0$.
Введем обозначение: $\cos x = t$.
Тогда $2t^2 - 3t + 1 \leqslant 0$, откуда $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$ и

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

298. 1) Область определения находим из условия $\frac{1-x}{x} > 0$. Отсюда $0 < x < 1$. На всем интервале функция убывает от $+\infty$ до $-\infty$. График пересекает ось абсцисс в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

2) Область определения находим из условия $x - 2 > 0$, $x - 2 \neq 1$. Итак, функция определена на интервале $(2, 3)$



Черт. 27

и $(3, \infty)$. На интервале $(2, 3)$ функция убывает от 0 до $-\infty$, на интервале $(3, \infty)$ она убывает от ∞ до 0 (см. черт. 27).

299.

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) =$$
$$= (f(1) + a^2) + (f(2) + a^3) + \ldots + (f(n-1) + a^n).$$

Отсюда

$$f(n) = 1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = 1 + \frac{a^2}{a-1}(a^{n-1} - 1).$$

300. Решая уравнение

$$yx^2-(3y+1)x+3y+1=0$$

относительно x, найдем, что $-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$. Поэтому $y_{\max}=1$ при $x=2$, $y_{\min}=-\frac{1}{3}$ при $x=0$.

301. Перепишем функцию в виде

$$y=x^4+\frac{4}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{x}.$$

По теореме о средних имеем:

$$y=x^4+\frac{4}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{x}+\frac{4}{x}\geqslant 5\sqrt[5]{4^4},\quad x>0.$$

Итак, $y_{\min}=5\sqrt[5]{4^4}$. Это значение y принимает при $x^4=\frac{4}{x}$, т. е. при $x=\sqrt[5]{4}$.

303. См. решение задачи 300. Находим дискриминант D уравнения $yx^2-(y+3)x+4=0$:

$$D=y^2-10y+9.$$

Отсюда $(y-1)(y-9)\geqslant 0$ и $y_{\min}=9$ при $x=\frac{2}{3}$.

304. Поскольку при $a>0$, $b>0$ имеем $a^2+b^2\geqslant\frac{(a+b)^2}{2}$, $\frac{1}{ab}\geqslant\frac{4}{(a+b)^2}$, то

$$z\geqslant\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{(x+y)^2}\right)^2.$$

Итак, $z\geqslant\frac{25}{2}$, поэтому $z_{\min}=\frac{25}{2}$ при $x=y=\frac{1}{2}$.

305. $y=9\left(\frac{1}{3}-x\right)^2x^2=9\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{3}-x\right)x\cdot x\leqslant$

$$\leqslant 9\cdot\left(\frac{\left(\frac{1}{3}-x\right)+\left(\frac{1}{3}-x\right)+x+x}{4}\right)^4=9\cdot\frac{16}{81\cdot 256}=\frac{1}{144}.$$

Итак, $y_{\max}=\frac{1}{144}$ при $x=\frac{1}{3}-x$, $x=\frac{1}{6}$.

Далее, $y_{\min}=0$ при $x=\frac{1}{3}$ и $x=0$.

307. Имеем:

$$y=(x-3)^2+1+\left(x+\frac{9}{x}\right)\geqslant(x-3)^2+1+6\geqslant 7.$$

Итак, $y_{\min}=7$ при $x=3$.

308. Положим $\sin x = u$, $\cos x = v$; тогда

$$y = 3(u+v) + 2(u^2+v^2) - 2(u+v)^2 =$$
$$= 3(u+v) + 2 - 2(u+v)^2.$$

Итак, при $u+v = \frac{3}{4}$ имеем максимум:

$$y_{\max} = \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{8} = \frac{25}{8} = 3,125.$$

309. Очевидно, $y = \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{5(1+\cos 2x)}{2}$,

$$y = 3 + 2\cos 2x + \frac{3}{2}\sin 2x, \qquad y = 3 + \frac{1}{2}(4\cos 2x + 3\sin 2x),$$

$$y = 3 + \frac{1}{10}\sin(2x+\varphi) \quad \left(\cos\varphi = \frac{3}{5},\ \sin\varphi = \frac{4}{5}\right).$$

Ответ: $y_{\max} = 3,1$, $y_{\min} = 2,9$.

310. При $n = 0$ равенство выполняется.

Пусть при $n = k > 0$ имеет место равенство

$$s_k = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \ldots + \frac{1}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}.$$

Тогда $s_{k+1} = s_k + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} =$
$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}$.

Итак, тождество доказано.

312. При $n = 0$ имеем: $11^2 + 12 = 133$. Пусть при $n = k > 0$ имеет место равенство $11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133 \cdot N$. Тогда

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} =$$
$$= 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot (133N - 11^{k+2}) =$$
$$= 144 \cdot 133N - 133 \cdot 11^{k+2} = 133N_1.$$

313. При $n = 1$ равенство справедливо.

Пусть при $n = k > 1$ имеет место равенство:

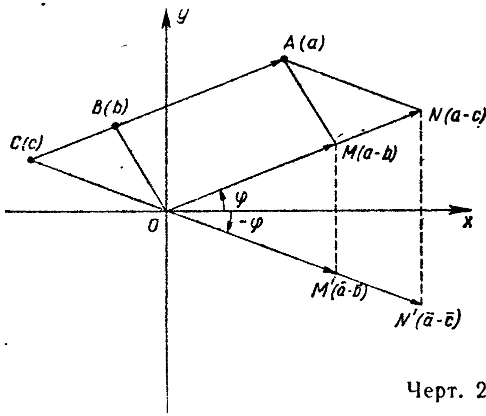
$$s_k = \frac{(k+1)\sin kx - k\sin(k+1)x}{2(1-\cos x)}.$$

Тогда

$$s_{k+1} = s_k + (k+1)\sin(k+1)x =$$
$$= \frac{1}{2(1-\cos x)}[(k+2)\sin(k+1)x - (k+1)\sin(k+2)x].$$

Итак, равенство имеет место и при $n=k+1$.

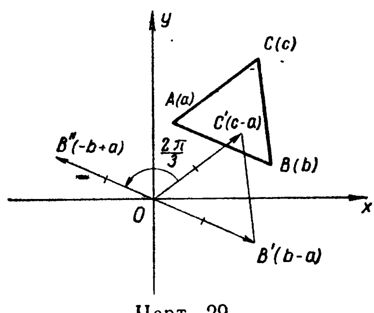
315. Пусть точка A не лежит между B и C. В таком случае комплексные числа $a-b$ и $a-c$ имеют одинаковые аргументы, а комплексное число $(a-b):(a-c)$ имеет аргумент, равный нулю (черт. 28). Это значит, что $(a-b):(a-c)$ есть вещественное число, и поэтому оно равно своему сопряженному $(\bar{a}-\bar{b}):(\bar{a}-\bar{c})$. Если точка A



Черт. 28

лежит между B и C, то $(a-b):(a-c)$ есть число отрицательное, и оно также равно своему сопряженному.

316. Точки B' и C', которым соответствуют комплексные числа $b-a$ и $c-a$, вместе с начальной точкой O являются вершинами равностороннего треугольника (черт. 29). Очевидно, что $\alpha(c-a)=-(b-a)$, где $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, так как поворотом вектора $\overline{OC'}$ на угол $\frac{2\pi}{3}$ около начала O получаем вектор, противоположный вектору $\overline{OB'}$. Итак, $(1+\alpha)a-b-\alpha c=0$. Но



Черт. 29

$\alpha^3=1$, причем $\alpha\neq 1$. Поэтому $\alpha^2+\alpha+1=0$, и последнее равенство принимает вид $-\alpha^2a-b-\alpha c=0$. Умножив его почленно на $-\alpha$, получим: $a+\alpha b+\alpha^2c=0$. Справедливо также обратное утверждение: если имеет место соотношение $a+\alpha b+\alpha^2 c=0$, где $\alpha=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$, то числам a, b и c соответствуют вершины равностороннего треугольника, который при $a=b=c$ вырождается в точку.

317. Очевидно, $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=d\bar{d}=R^2$, где R — радиус данной окружности. Параллельность хорд AB и CD означает (см. решение задачи 315), что

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}.$$

Отсюда $(a-b)\left(\frac{R^2}{c}-\frac{R^2}{d}\right)=(c-d)\left(\frac{R^2}{a}-\frac{R^2}{b}\right)$ и $ab=cd$.

318. Поскольку $(a-b):(c-d)$ есть число чисто мнимое, то

$$\frac{a-b}{c-d}+\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}=0,$$

откуда следует $ab+cd=0$ (см. решение задачи 317).

319. Записать условия перпендикулярности AB и CH, BC и AH:

$$\frac{h-c}{a-b}+\frac{\bar{h}-\bar{c}}{\bar{a}-\bar{b}}=0,\quad \frac{h-a}{b-c}+\frac{\bar{h}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}}=0.$$

Исключив из этой системы $\bar{h}$ и учитывая, что $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=R^2$, получим:

$$a+b+c=h.$$

320. Записать условие перпендикулярности CA и OA, CB и OB:

$$\frac{a-c}{a}+\frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{a}}=0,\quad \frac{b-c}{b}+\frac{\bar{b}-\bar{c}}{\bar{b}}=0,\quad a\bar{a}=b\bar{b}=R^2.$$

Из полученной системы исключить $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

321. Точки A, B, C коллинеарны, поэтому

$$\frac{a-b}{a-d}=\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{a}-\bar{d}}.$$

Векторы AB и CD перпендикулярны, поэтому

$$\frac{a-b}{c-d}+\frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{d}}=0.$$

Кроме того, $a\bar{a}=b\bar{b}=c\bar{c}=R^2$. Исключив из системы выписанных пяти уравнений $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, найдем искомое выражение d через a, b, c.

Содержание

Дополнительные главы
по курсу математики 10 класса
для факультативных занятий

Редактор Н. И. Никитина
Художественный редактор В. С. Эрденко
Технический редактор О. Н. Семина
Корректор Р. Б. Штутман

Сдано в набор 6/V 1969 г. Подписано к печати 16/XII 1969 г. 84×108$^{1}/_{32}$. Тип. бум. № 3. Печ. л. 8. Условн. л. 13,44. Уч.-изд. л. 12.24. Тираж 300 тыс. экз.
(Пл. 1969 г. № 348)

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Москва, М-54, Валовая, 28. Заказ № 15. 2971
Цена 31 к.

Отпечатано с матриц в типографии № 1 Управления по печати Хабаровского крайисполкома, г. Хабаровск, ул. Серышева, 31.

БТЗ
3

31 коп.